



Exercise-1

Marked questions are recommended for Revision.

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Degree & Order, Differential equation formation

खण्ड (A) : घात एवं कोटि, अवकल समीकरण बनाना

A-1. Find the order and degree of the following differential equations -

निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि और घात ज्ञात कीजिए -

(i) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^4 = 0$ **Ans.** (2, 2)

(ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = y$ **Ans.** (3, 2)

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ **Ans.** 1, 1

(iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ **Ans.** 1, 2

(v) $e^{\frac{d^3y}{dx^3}} - x \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ **Ans.** 3, degree is not applicable (घात परिभाषित नहीं है।)

(vi) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{5/2} = x \frac{d^3y}{dx^3}$ **Ans.** 3, 2

(vii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin\left(x + \frac{dy}{dx}\right)$

Ans. 2, degree is not applicable (घात परिभाषित नहीं है।)

Sol. (i) Order 2
degree 2

(ii) 3, 2

(iii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$

order : 1 degree : 1

(iv) 1, 2

(v) 3, degree is not applicable

(vi) 3, 2

(vii) 2, degree is not applicable.

Hindi. (i) कोटि 2

घात 2

(ii) 3, 2

(iii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$

कोटि -1 घात -1

(iv) 1, 2



- (v) 3, घात परिभाषित नहीं है।
 (vi) 3, 2
 (vii) 2, घात परिभाषित नहीं है।

A-2. Identify the order of the following equations, (where a, b, c, d are parameters)

निम्नलिखित समीकरणों की कोटि ज्ञात कीजिए, (जहाँ a, b, c, d प्राचल हैं) –

- (i) $(\sin a)x + (\cos a)y = \pi$ **Ans.** 1
 (ii) $y^2 = 4a e^{x+b}$ **Ans.** 1
 (iii) $\ln(ay) = be^x + c$ **Ans.** 2
 (iv) $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - ax\right) + ce^{bx+d}$ **Ans.** 2

Sol. (i) arbitrary constant 1 so order is one.

(ii) $y^2 = 4(ae^b) e^x = 4ce^x$
 arbitrary constant 1 so order 1

(iii) $\ln a + \ln y = be^x + c$

$$\ln y = be^x + c'$$

order 2

(iv) $y = \frac{1 + \tan ax}{1 - \tan ax} \cdot \frac{1 - \tan ax}{1 + \tan ax} + (ce^d)e^{bx} = 1 + ke^{bx}$

two arbitrary constant $\therefore$ order 2

Hindi. (i) ऐच्छिक अचर 1 है। अतः क्रम 1 है।

(ii) $y^2 = 4(ae^b) e^x = 4ce^x$
 ऐच्छिक अचर 1 है। अतः क्रम 1 है।

(iii) $\ln a + \ln y = be^x + c$

$$\ln y = be^x + c'$$

कोटि 2

Hindi. (i) ऐच्छिक अचर 1 है। अतः क्रम 1 है।

(ii) $y^2 = 4(ae^b) e^x = 4ce^x$
 ऐच्छिक अचर 1 है। अतः क्रम 1 है।

(iii) $\ln a + \ln y = be^x + c$

$$\ln y = be^x + c'$$

कोटि 2

(iv) $y = \frac{1 + \tan ax}{1 - \tan ax} \cdot \frac{1 - \tan ax}{1 + \tan ax} + (ce^d)e^{bx} = 1 + ke^{bx}$

ऐच्छिक अचर 2 है। $\therefore$ कोटि 2 है।

A-3. Form differential equations to the curves

(i) $y^2 = m(n^2 - x^2)$, where m, n are arbitrary constants.

(ii) $ax^2 + by^2 = 1$, where a & b are arbitrary constants.

(iii) $xy = ae^{-x} + be^x$

निम्नलिखित वक्रों से बनने वाली अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए –

(i) $y^2 = m(n^2 - x^2)$, जहाँ m, n स्वेच्छ अचर हैं।

(ii) $ax^2 + by^2 = 1$, जहाँ a व b स्वेच्छ अचर हैं।

(iii) $xy = ae^{-x} + be^x$

Ans. (i) $xyy_2 + (xy_1 - y)y_1 = 0$ (ii) $xy \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = xy$

Sol. (i) $y^2 = m(x^2 - x^2) \Rightarrow y^2 = k_1 - k_2x^2$



$$\begin{aligned}
 2yy' &= -2k_2x \\
 (y')^2 + yy'' &= -k_2 \\
 yy' &= x(y'^2 + y'') \\
 \Rightarrow xyy'' + (xy' - y)y' &= 0 \\
 \text{(ii)} \quad ax^2 + by^2 &= 1 \quad \dots(1) \\
 2ax + 2byy' &= 0 \quad \dots(2) \\
 2a + 2b(y'^2 + yy'') &= 0 \quad \dots(3) \\
 \text{solving (1) (2) \& (3)} \\
 xyy'' + xy'^2 - yy' &= 0 \\
 \text{(iii)} \quad xy &= ae^{-x} + be^x \\
 (y + y'x) &= -ae^{-x} + be^x \\
 y' + y''x + y' &= ae^{-x} + be^x \\
 x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} &= xy
 \end{aligned}$$

Hindi

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad y^2 &= m(x^2 - x^2) \Rightarrow y^2 = k_1 - k_2x^2 \\
 2yy' &= -2k_2x \\
 (y')^2 + yy'' &= -k_2 \\
 yy' &= x(y'^2 + y'') \\
 \Rightarrow xyy'' + (xy' - y)y' &= 0 \\
 \text{(ii)} \quad ax^2 + by^2 &= 1 \quad \dots(1) \\
 2ax + 2byy' &= 0 \quad \dots(2) \\
 2a + 2b(y'^2 + yy'') &= 0 \quad \dots(3) \\
 \text{(1), (2) एवं (3) को हल करने पर} \\
 xyy'' + xy'^2 - yy' &= 0 \\
 \text{(iii)} \quad xy &= ae^{-x} + be^x \\
 (y + y'x) &= -ae^{-x} + be^x \\
 y' + y''x + y' &= ae^{-x} + be^x \\
 x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} &= xy
 \end{aligned}$$

- A-4.**
- Form differential equation of all circles touching both positive co-ordinate axes.
 - Form differential equation of all straight lines at a distance unity from (2, 0)
 - Form D.E of locus of a point whose distance from origin is equal to distance from line $x + y + \lambda = 0$ where λ is a variable parameter.
- (i) दोनों धनात्मक निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करने वाले सभी वृत्तों की अवकल समीकरण बनाइये।
(ii) बिन्दु (2, 0) से इकाई दूरी पर सभी सरल रेखाओं की अवकल समीकरण बनाइये।
(iii) बिन्दुओं के बिन्दुपथ की अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि बिन्दु की मूल बिन्दु से दूरी रेखा $x + y + \lambda = 0$ से दूरी के बराबर है, जहाँ λ प्राचल है।

Ans.

$$\text{(i)} \quad x^2 + y^2 - 2 \frac{x + yy'}{1 + y'} (x + y) + \frac{(x + yy')^2}{(1 + y')^2} = 0$$

$$\text{(ii)} \quad (1 + y'^2) = (y - (x - 2)y')^2$$

$$\text{(iii)} \quad (1 + y') \sqrt{x^2 + y^2} = \pm \sqrt{2}(x + yy')$$

Sol.

$$\text{(i)} \quad (x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2r(x + y) + r^2 = 0$$

$$2(x - r) + 2(y - r) \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow r\{1 + y'\} = x + yy'$$

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{x + yy'}{1 + y'} (x + y) + \frac{(x + yy')^2}{(1 + y')^2} = 0$$

(ii)



$(2, 0)$
 $(x-2)^2 + y^2 = 1$
 $(x-2) \cos \theta + y \sin \theta = 1$
 $\cos \theta + y' \sin \theta = 0$
 $-(x-2)y' \sin \theta + y \sin \theta = 1$
 $\sin \theta = \frac{1}{y - (x-2)y'}$
 $\cos \theta = \frac{-y'}{y - (x-2)y'}$

(iii) Let (h, k) माना (h, k) बिन्दु है।

$$\frac{|h+k+\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{h^2+k^2}$$

$$\{(h+k)+\lambda\}^2 = 2(h^2+k^2) \quad \Rightarrow \quad (h+k)+\lambda = \pm \sqrt{2}\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\Rightarrow x+y+\lambda = \pm \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad 1+y' = \pm \frac{\sqrt{2}(2x+2yy')}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow (1+y') \sqrt{x^2+y^2} = \pm \sqrt{2}(x+yy')$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + y'^2 = (y - (x-2)y')^2$$

Aliter: let line be (वैकल्पिक हल: माना रेखा का समीकरण $y = mx + c$
 $mx - y + c = 0$ है।

$$\frac{|2m+c|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \Rightarrow 2m+y-mx = \pm \sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow y' - m = 0$$

$$\text{so } (2y' + y - y'x)^2 = 1 + y'^2$$

$$(1 + y'^2) = (y - (x-2)y')^2$$

Section (B) : Variable separable, Homogeneous equation, polar substitution

खण्ड (B) : चर पृथक्करण, समघात समीकरण, ध्रुवीय प्रतिस्थापन

B-1. Solve the following differential equations

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए –

(i) $(1 + \cos x) dy = (1 - \cos x) dx$

(ii) $\frac{dy}{dx} - x \sin^2 x = \frac{1}{x \log x}$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \log x + 1)}{\sin y + y \cos y}$

Ans. (i) $y = 2 \tan \frac{x}{2} - x + c$

(ii) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + \log |\log x| + c$

(iii) $y \sin y = x^2 \log x + c$

Sol. (i) $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \cot^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \int dy = \int \tan^2 \frac{x}{2} dx$

$$\Rightarrow y = 2 \tan \frac{x}{2} - x + c$$

(ii) $\frac{dy}{dx} - x \sin^2 x = \frac{1}{x \log x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \sin^2 x + \frac{1}{x \log x} \Rightarrow \int dy = \int \left(x \frac{(1 - \cos 2x)}{2} + \frac{1}{x \log x} \right) dx$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \right\} + \log(\log x) + C$$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \log x + 1)}{\sin y + y \cos y}$



$$\int (\sin y + y \cos y) dy = \int (2x \ln x + x) dx$$

using by parts

$$y \sin y = x^2 \ln x + C$$

Hindi. (i) $\frac{dx}{dy} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \cot^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \int dy = \int \tan^2 \frac{x}{2} dx$

$$\Rightarrow y = 2 \tan \frac{x}{2} - x + c$$

(ii) $\frac{dy}{dx} - x \sin^2 x = \frac{1}{x \log x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \sin^2 x + \frac{1}{x \log x} \Rightarrow \int dy = \int \left(x \frac{(1 - \cos 2x)}{2} + \frac{1}{x \log x} \right) dx$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \right\} + \log(\log x) + C$$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \ln x + 1)}{\sin y + y \cos y}$

$$\int (\sin y + y \cos y) dy = \int (2x \ln x + x) dx$$

खण्डशः समाकलन से

$$y \sin y = x^2 \ln x + C$$

B-2. Solve :

[16JM120594]

हल कीजिए—

(i) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

(ii) $\frac{dy}{dx} + e^{x-y} + e^{y-x} = 1$

Ans. (i) $\log \left| \tan \left(\frac{x+y}{2} \right) + 1 \right| = x + c$ (ii) $\tan^{-1}(e^{y-x}) + x = c$

Sol. (i) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

$$x + y = u$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \sin u + \cos u$$

$$\int \frac{du}{1 + \sin u + \cos u} = \int dx \Rightarrow \log \left| \tan \left(\frac{x+y}{2} \right) + 1 \right| = x + c$$

(ii) $\frac{dy}{dx} + e^{x-y} + e^{y-x} = 1$ put $y - x = t$ रखने पर $\Rightarrow \frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dt}{dx}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dt}{dx} + e^{-t} + e^t = 1 \Rightarrow \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt + dx = 0 \Rightarrow \tan^{-1}(e^t) + x = c \Rightarrow \tan^{-1} \left(\frac{e^y}{e^x} \right) + x = c$$

B-3. Solve :

हल कीजिए—

(i) $\frac{x dx - y dy}{x dy - y dx} = \sqrt{\frac{1+x^2-y^2}{x^2-y^2}}$

(ii) $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$

Ans. (i) $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{1 + x^2 - y^2} = \frac{c(x+y)}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ (ii) $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x} + c$



Sol. (i) $\frac{xdx - ydy}{xdy - ydx} = \sqrt{\frac{1+x^2-y^2}{x^2-y^2}}$

$$x = r \sec \theta$$

$$y = r \tan \theta$$

$$x^2 - y^2 = r^2$$

$$dx = r \sec \theta \tan \theta d\theta + \sec \theta dr$$

$$dy = r \sec^2 \theta d\theta + \tan \theta dr$$

$$\Rightarrow \frac{r dr}{r^2 \sec \theta d\theta} = \sqrt{\frac{1+r^2}{r^2}} \Rightarrow \int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \int \sec \theta d\theta$$

on solving हल करने पर $\sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{1 + x^2 - y^2} = \frac{c(x+y)}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

(ii) Put $x = r \cos \theta$ & $y = r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow xdx + ydy = r dr$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow xdy - ydx = r^2 d\theta$$

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{rdr}{r} = \frac{r^2 d\theta}{r^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow \int dr = \int \sec^2 \theta d\theta$$

$$r = \tan \theta + c$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{x} + c$$

B-4. Solve :

(i) $x^2 dy + y(x+y) dx = 0$, given that $y = 1$, when $x = 1$

(ii) $y \cos \frac{y}{x} (xdy - ydx) + x \sin \frac{y}{x} (xdy + ydx) = 0$, when $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

हल कीजिए –

(i) $x^2 dy + y(x+y) dx = 0$ दिया गया है जब $x = 1$, तब $y = 1$

(ii) $y \cos \frac{y}{x} (xdy - ydx) + x \sin \frac{y}{x} (xdy + ydx) = 0$, जब $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ans. (i) $3x^2y = 2x + y$ (ii) $xy \sin (y/x) = \frac{\pi}{2}$

Sol. (i) $x^2 dy + y(x+y)dx = 0$ & तथा at $y = 1$ $x = 1$ पर

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y)}{x^2}$$

Let माना $y = tx$

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{-t(1+t)}{1}$$

$$\Rightarrow -\int \frac{dt}{t^2 + 2t} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dt}{t(t+2)} = \ln x + c$$

$$-\frac{1}{2} (\ln t - \ln(t+2)) = \ln x + c$$

at $x = 1$ पर $y = 1 \therefore t = 1$





$$\Rightarrow c = \frac{\ln 3}{2} \Rightarrow 3x^2 y = 2x + y$$

$$(ii) \quad yx^2 \cos \frac{y}{x} d\frac{y}{x} + x \sin \frac{y}{x} d(xy) = 0$$

$$\int \cot\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right) = - \int \frac{d(xy)}{(xy)}$$

$$\ln \sin\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln(xy) + \ln c$$

B-5. Find the equation of the curve satisfying $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{x^2 + 2xy - y^2}$ and passing through (1, -1).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{x^2 + 2xy - y^2} \text{ को संतुष्ट करने वाले और बिन्दु } (1, -1) \text{ से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।}$$

Ans. $x + y = 0$

$$\text{Sol. } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{x^2 + 2xy - y^2} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow \int dy + \int dx = 0 \Rightarrow y + x = k$$

it passes through (1, -1)

$$\therefore k = 0$$

Equation of curve $x + y = 0$

$$\text{Hindi } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{x^2 + 2xy - y^2} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \Rightarrow \int dy + \int dx = 0 \Rightarrow y + x = k$$

यह (1, -1) से गुजरती है।

$$\therefore k = 0$$

वक्र का समीकरण $x + y = 0$

B-6. Identify the conic whose differential equation is $(1 + y^2) dx - xydy = 0$ and passing through (1, 0). Also find its foci and eccentricity

बिन्दु (1, 0) से गुजरने वाले और अवकल समीकरण $(1 + y^2) dx - xydy = 0$ को संतुष्ट करने वाले शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा नाभि व उत्केन्द्रता भी ज्ञात कीजिए।

Ans. Conic शांकव : $x^2 - y^2 = 1$ (hyperbola अतिपरवलय)

foci नाभियाँ : $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $e = \sqrt{2}$

$$\text{Sol. } \int \frac{dx}{x} = \int \frac{y}{1+y^2} dy$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + c$$

$$\ln \left(\frac{x^2}{1+y^2} \right) = k_1$$

$$\Rightarrow x^2 = k_2 (1 + y^2)$$

$$\text{at } (1, 0) \quad k_2 = 1$$

$$(1, 0) \text{ पर } k_2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 + y^2$$

$$e = \sqrt{2} \text{ foci } (\pm\sqrt{2}, 0)$$

$$e = \sqrt{2} \text{ नाभियाँ } (\pm\sqrt{2}, 0)$$

B-7. If a curve passes through the point (1, $\pi/4$) and its slope at any point (x, y) on it is given by $y/x - \cos^2(y/x)$, then find the equation of the curve.



यदि एक वक्र बिन्दु $(1, \pi/4)$ से गुजरता है और इसके किसी बिन्दु (x, y) पर प्रवणता $y/x - \cos^2 y/x$ द्वारा दी जाती हो, तो वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $\tan y/x = 1 - \log x$.

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2 \frac{y}{x}$ put $y = tx$ $y = tx$ रखने पर $t + x \frac{dt}{dx} = t - \cos^2 t$

$$\Rightarrow x \frac{dt}{dx} = -\cos^2 t \quad \Rightarrow t + x \frac{dt}{dx} = t - \cos^2 t$$

$$\Rightarrow \tan t = -\ln x + C$$

$$\Rightarrow \tan \frac{y}{x} = -\ln x + C$$

it passes through $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ यह $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ से गुजरता है।

$$C = 1$$

$$\Rightarrow \tan \frac{y}{x} + \ln x = 1$$

- B-8.** (i) The temperature T of a cooling object drops at a rate which is proportional to the difference $T - S$, where S is constant temperature of the surrounding medium.

Thus, $\frac{dT}{dt} = -k(T - S)$, where $k > 0$ is a constant and t is the time. Solve the differential equation if it is given that $T(0) = 150$.

- (ii) The surface area of a spherical balloon, being inflated changes at a rate proportional to time t . If initially its radius is 3 units and after 2 seconds it is 5 units, find the radius after t seconds.

- (iii) The slope of the tangent at any point of a curve is λ times the slope of the straight line joining the point of contact to the origin. Formulate the differential equation representing the problem and hence find the equation of the curve.

- (i) एक पात्र का तापमान T जिस दर से गिर रहा है वह अन्तर $T - S$ के समानुपाती है, जहाँ S बाह्य वातावरण का नियत तापमान है। अतः $\frac{dT}{dt} = -k(T - S)$, जहाँ $k > 0$ एक स्थिरांक है और t समय है। अवकल समीकरण हल कीजिए यदि $T(0) = 150$ दिया गया हो।

- (ii) एक गोलाकार गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर समय t के समानुपाती है। यदि इसकी प्रारम्भिक त्रिज्या 3 इकाई और 2 सेकण्ड के बाद यह 5 इकाई है, तो t सेकण्ड पश्चात् त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- (iii) एक वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु को मूलबिन्दु से मिलाने वाली रेखा की प्रवणता की λ गुनी है। इसे निरूपित करने वाली अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए और इसकी सहायता से वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) $\frac{T - S}{150 - S} = e^{-kt}$ (ii) $r = \sqrt{4t^2 + 9}$ units (इकाई)

(iii) $y = kx^\lambda$ where, k is some constant
 $y = kx^\lambda$ जहाँ k अचर है।

Sol. (i) $\frac{dT}{dt} = -k(T - S) \quad \Rightarrow \quad \ln(T - S) = -kt + C$

$$\ln(S_0 - S) = C$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{T - S}{S_0 - S}\right) = -kt$$

(ii) $\frac{d}{dt}(4\pi r^2) = kt$
 $\int d(4\pi r^2) = \int kt dt$





$$\Rightarrow 4\pi r^2 = \frac{kt^2}{2} + c$$

$$t = 0; r = 3 \Rightarrow c = 36\pi$$

$$t = 2; r = 5 \Rightarrow k = 32\pi$$

$$\therefore r^2 = 4t^2 + 9$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{4t^2 + 9}$$

$$(iii) \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda y}{x}$$

$$\ell ny = \lambda \ell nx + C$$

$$\therefore y = kx^\lambda$$

B-9. Find the curve such that the distance between the origin and the tangent at an arbitrary point is equal to the distance between the origin and the normal at the same point.

उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी स्वेच्छ बिन्दु पर स्पर्श रेखा और मूलबिन्दु के बीच की दूरी उसी बिन्दु पर अभिलम्ब और मूलबिन्दु के बीच की दूरी के बराबर हो।

Ans. $\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\pm \tan^{-1} \frac{y}{x}}$

Sol. $\frac{|y - mx|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{|my + x|}{\sqrt{1+m^2}}$

$$|y - mx| = |my + x| \Rightarrow y - mx = \pm(my + x) \quad \dots(i)$$

by taking positive sign धनात्मक चिह्न लेने पर

$$y - mx = my + x$$

$$y - x = m(x + y)$$

$$\Rightarrow m = \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x} \quad \text{let } y = tx \quad \text{माना } y = tx$$

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{t-1}{t+1}$$

$$-\int \frac{t dt}{1+t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2} = \ell n x + c$$

$$-\frac{1}{2} \ell n(1+t^2) - \tan^{-1} t = \ell n x + c$$

$$\ell n \sqrt{x^2 + y^2} = -\tan^{-1} \frac{y}{x} + c$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = c_1 e^{-\tan^{-1}(y/x)}$$

from equ. (i) by taking negative sign समीकरण (i) में ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{-\frac{y}{x} + 1} \quad \text{put } y = tx \quad y = tx \text{ रखने पर}$$

$$\Rightarrow t + x \frac{dt}{dx} = \frac{t+1}{-t+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1-t}{1+t^2} dt = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} t - \frac{1}{2} \ell n(1+t^2) = \ell nx + c$$

$$\ell n \sqrt{x^2 + y^2} = +\tan^{-1} \frac{y}{x} + c \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = c_2 e^{\tan^{-1} y/x}$$

then final solution $\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{\pm \tan^{-1} y/x}$





तब अभीष्ट हल $\sqrt{x^2 + y^2} = c e^{\pm \tan^{-1} y/x}$

B-10. Find the curve such that the ordinate of any of its points is the geometric mean between the abscissa and the sum of the abscissa and subnormal at the point.

वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर स्थित किसी बिन्दु की कोटि, भुज और उस बिन्दु पर अधोलम्ब एवं भुज के योग के बीच गुणोत्तर माध्य के बराबर है।

Ans. $y^2 = \frac{x^4 + c}{2x^2}$ or (या) $y^2 + 2x^2 \ln x = cx^2$

Sol. $y = \sqrt{x(x + yy')}$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + x \left| \frac{y dy}{dx} \right|$$

case-I : $y^2 = x^2 + xy \frac{dy}{dx}$

put $y^2 = t \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

स्थिति-I : $y^2 = x^2 + xy \frac{dy}{dx}$

$y^2 = t$ रखने पर $2y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$$\Rightarrow t = x^2 + \frac{x}{2} \frac{dt}{dx}$$

after solving हल करने पर

$$\frac{t}{x^2} + 2 \ln x = c$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 2 \ln x = c$$

case-II : $y^2 = x^2 - xy \frac{dy}{dx}$

put $y^2 = t \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

स्थिति-II : $y^2 = x^2 - xy \frac{dy}{dx}$

$y^2 = t$ रखने पर $2y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$$\Rightarrow t = x^2 - \frac{x}{2} \frac{dt}{dx}$$

after solving हल करने पर

$$tx^2 - \frac{x^4}{2} + c = 0$$

$$\Rightarrow y^2 x^2 - \frac{x^4}{2} + c = 0$$

Section (C) : Linear upon linear, Linear diff. eq. & Bernoulli's diff. eq.

खण्ड (C) : रेखिक भाग, रेखिक अवकल समीकरण एवं बर्नौली अवकल समीकरण

C-1. Solve : [16JM120596]

हल कीजिए –

(i) $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 6y + 5}{3y + 2x + 4}$

(iii) $(2x + 3y - 5) dy + (3x + 2y - 5) dx = 0$

(iv) $4 \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}x - 4y + 7}{x - y}$

Ans. (i) $x^2 + y^2 - xy + x - y = c$ (ii) $y - 2x + \frac{3}{8} \ln(24y + 16x + 23) = c$



Resonance
Educating for better tomorrow

Reg. & Corp. Office : CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in

Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 10



$$(iii) 4xy + 3(x^2 + y^2) - 10(x + y) = c \quad (iv) 8xy - 4y^2 = \sqrt{3}x^2 + 14x + C$$

Sol. (i) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$
 $(2x + 1)dx + (2y - 1)dy - (ydx + xdy) = 0$
 integrating it समाकलन करने पर
 $x^2 + x + y^2 - y - xy = c$

(ii) $3y + 2x = v \quad \therefore 3 \frac{dy}{dx} + 2 = \frac{dv}{dx}$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{dv}{dx} - 2 \right) = \frac{2v + 5}{v + 4}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{6v + 15}{v + 4} + 2 = \frac{8v + 23}{v + 4}$$

$$\frac{8v + 32}{8v + 23} dv = 8dx$$

$$\left(1 + \frac{9}{8v + 23} \right) dv = 8dx$$

$$v + \frac{9}{8} \ln(8v + 23) = 8x + c$$

$$y - 2x + \frac{3}{8} \ln(24y + 16x + 23) = k$$

(iii) $\therefore b_1 + a_2 = 0$
 $\Rightarrow (2y dx + 2x dy) + 3y dy - 5 dy + 3x dy - 5 dx = 0$
 $\Rightarrow 2xy + \frac{3y^2}{2} - 5y + \frac{3x^2}{2} - 5x + c = 0$

(iv) $4x dy - 4y dx = \sqrt{3} x dx - 4y dx + 7 dx \Rightarrow 4(xdy + ydx) - 4y dx = \sqrt{3} x dx + 7 dx$
 $\int 4d(xy) - \int 2d(y^2) = \int \frac{\sqrt{3}}{2} d(x^2) + 7 \int dx \Rightarrow 4xy - 2y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 3x + d$
 $\Rightarrow 8xy - 4y^2 = \sqrt{3} x^2 + 14x + C$

C-2. Solve :
 हल कीजिए-

(i) $\frac{dy}{dx} = y \tan x - 2 \sin x$

(ii) $(1 + y + x^2y) dx + (x + x^3)dy = 0$

(iii) $(x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = y, y > 0$

(iv) $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$

Ans. (i) $y = \cos x + k \sec x$

(ii) $yx = -\tan^{-1}x + c$

(iii) $\frac{x}{y} = 3y + C$

(iv) $(1 + x^2)y = \sin x + C$

Sol. (i) $\frac{dy}{dx} = y \tan x - 2 \sin x$

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = -2 \sin x$$

$$I.F. = e^{-\int \tan x dx} = |\cos x|$$

समाकल गुणांक (I.F.) = $e^{-\int \tan x dx} = |\cos x|$

$$y \cos x = \frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$\Rightarrow y = \frac{\cos 2x}{\cos x} + \sec x \cdot c \Rightarrow y = \cos x + k \sec x$$



$$(ii) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y+x^2y)}{x+x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{-1}{x+x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} + y/x = \frac{-1}{x(1+x^2)}$$

$$I.F. = x \text{ समाकल गुणांक (I.F.)} = x$$

$$\frac{d}{dx} (yx) = \frac{-1}{1+x^2} \Rightarrow yx = -\tan^{-1}x + c$$

$$(iii) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y} = 3y$$

$$I.F. = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y} \quad \text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{x}{y} = \int 3 \frac{y dy}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = 3y + C$$

$$(iv) \quad (1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{\cos x}{1+x^2}$$

$$I.F. = 1+x^2 \quad \text{समाकल गुणांक (I.F.)} = 1+x^2$$

$$\frac{d}{dx} (y(1+x^2)) = \cos x$$

$$(1+x^2)y = \sin x + C$$

C-3 Solve :

हल कीजिए—

[16JM120595]

$$(i) \quad x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^4$$

$$(ii) \quad 2 \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{xy + y}$$

$$(iii) \quad \frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^x - e^y)$$

$$(iv) \quad y y' \sin x = \cos x (\sin x - y^2)$$

Ans.

$$(i) \quad \frac{1}{y^3} = 3x^2 + kx^3$$

$$(ii) \quad y^2 + (1+x) \ln(1+x) + 1 + c(1+x)$$

$$(iii) \quad e^y = ce^{-e^x} + e^x - 1$$

$$(iv) \quad y^2 \sin^2 x = \frac{2}{3} \sin^3 x + c$$

Sol.

$$(i) \quad x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^4 \Rightarrow \frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y^4} = \frac{x^2}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy^3} = x \quad \frac{1}{y^3} = t \Rightarrow \frac{-3}{y^4} \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \frac{dt}{dx} + \frac{t}{x} = x \Rightarrow \frac{dt}{dx} - \frac{3t}{x} + 3x = 0$$



Resonance
Educating for better tomorrow

Reg. & Corp. Office : CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in

Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 12



$$\text{I.F.} = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-\ln x^3} = \frac{1}{x^3} \quad \text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{-\int \frac{3}{x} dx} = e^{-\ln x^3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3x^3} \frac{dt}{dx} + \frac{t}{x^4} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow d\left(\frac{-t}{3x^3}\right) = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{3x^3} = -\frac{1}{x} + c \Rightarrow t = 3x^2 - 3cx^3 \quad (\because t = \frac{1}{y^3})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^3} = 3x^2 + kx^3$$

$$(ii) 2 \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{xy + y} \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x+1} - \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t}{x+1} - \frac{x}{x+1} \quad \text{put } y^2 = t \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad y^2 = t \text{ रखने पर } 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\text{I.F.} = e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{-\ln \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x} \quad \text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} = e^{-\ln \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)} \frac{dt}{dx} - \frac{t}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2} \Rightarrow \int d\left(\frac{t}{(1+x)}\right) = \int \frac{-x}{(1+x)^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{t}{1+x} = -\int \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx \Rightarrow \frac{t}{1+x} = -\ln(1+x) - \frac{1}{1+x} + c$$

$$\Rightarrow y^2 + (1+x) \ln(1+x) + 1 + c(1+x)$$

$$(iii) \frac{dy}{dx} = e^{x-y} (e^x - e^y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x-y} - e^x \Rightarrow \frac{e^y dy}{dx} = e^{2x} - e^{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{e^y dy}{dx} + e^x e^y = e^{2x}$$

$$\text{Let } e^y = t \Rightarrow \frac{e^y dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{माना } e^y = t \Rightarrow \frac{e^y dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} + e^x t = e^{2x}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x} \quad \text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{\int e^x dx} = e^{e^x}$$

$$\Rightarrow t \cdot e^{e^x} = \int e^{2x} e^{e^x} dx \quad \text{put } e^x = p$$

$$\Rightarrow t \cdot e^{e^x} = \int p e^p dp$$

$$\text{on solving हल करने पर } e^y = ce^{-e^x} + e^x - 1$$

$$(iv) yy' \sin x = \cos x (\sin x - y^2)$$

$$y \sin x \frac{dy}{dx} = \cos x \sin x - y^2 \cos x$$

$$\Rightarrow y \frac{dy}{dx} + y^2 \cot x = \cos x$$

$$\text{put } y^2 = t \Rightarrow yy_1 = \frac{1}{2} \frac{dt}{dx}$$

$$y^2 = t \text{ रखने पर } yy_1 = \frac{1}{2} \frac{dt}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} + t \cot x = \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} + 2t \cot x = 2 \cos x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int 2 \cot x dx} = e^{2 \ln \sin x} = \sin^2 x$$

$$\text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{\int 2 \cot x dx} = e^{2 \ln \sin x} = \sin^2 x$$



$$\Rightarrow t \sin^2 x = \int 2 \cos x \sin^2 x dx$$

$$\text{put } \sin x = p \Rightarrow \cos x dx = dp$$

$$\sin x = p \text{ रखने पर } \cos x dx = dp$$

$$= 2 \int p^2 dp = 2 \frac{p^3}{3} + c \Rightarrow y^2 \sin^2 x = \frac{2}{3} \sin^3 x + c$$

C-4. (a) Find the integrating factor of the following equations

(i) $(x \log x) \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ **Ans.** $\pm \ell n x$

(ii) $\frac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x$, is **Ans.** $\pm \sec x$

(b) If the integrating factor of $x(1 - x^2) dy + (2x^2 y - y - ax^3) dx = 0$ is $e^{\int p \cdot dx}$, then P is equal to

Ans. $\frac{(2x^2 - 1)}{x(1 - x^2)}$

(a) निम्नलिखित समीकरणों के समाकल गुणांक ज्ञात कीजिए –

(i) $(x \log x) \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ (ii) $\frac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x$, is

(b) यदि समीकरण $x(1 - x^2) dy + (2x^2 y - y - ax^3) dx = 0$ का समाकल गुणांक $e^{\int p \cdot dx}$ हो, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. (a) (i) $(x \log x) \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = \frac{2}{x}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\ell n |\ell n x|} = |\ell n x|$$

$$\text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\ell n |\ell n x|} = |\ell n x|$$

(ii) $\frac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x \Rightarrow \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} \tan x + \sec x = 0$

Put $\frac{1}{y} = t$

$\frac{1}{y} = t$ रखने पर

$$- \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

Now diff. equation

अब अवकल समीकरण

$$- \frac{dt}{dx} - t \tan x + \sec x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} + t \tan x - \sec x = 0$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \tan x dx} = e^{\ell n |\sec x|} = |\sec x|$$

$$\text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{\int \tan x dx} = e^{\ell n |\sec x|} = |\sec x|$$

(b) $x(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + y(2x^2 - 1) = ax^3$

$$\frac{dy}{dx} + y \left(\frac{2x^2 - 1}{x(1 - x^2)} \right) = \frac{ax^3}{x(1 - x^2)} \quad \therefore P = \frac{2x^2 - 1}{x(1 - x^2)}$$

Section (D) : Exact differential equation, Higher degree & Higher Order differential equation

खण्ड (D) : यथार्थ अवकल समीकरण, उच्च घात एवं उच्च कोटि की अवकल समीकरण

D-1 Solve the following differential equations

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए।

(i) $xdy - ydx = x^3 dy + x^2 y dx$



(ii) $x^2y(2xdy + 3ydx) = dy$

(iii) $x dy - ydx = x^{10}y^4 (3ydx + 4x dy)$

Ans.

(i) $(y/x) = xy + C$

(ii) $x^3y^2 = y + C$

(iii) $\frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} \right)^4 = \frac{x^6 \cdot y^8}{2} + C$

Sol.

(i) $\frac{xdy - ydx}{x^2} = xdy + ydx \Rightarrow d(y/x) = d(xy) \Rightarrow (y/x) = xy + C$

(ii) $2yx^3dy + 3x^2y^2 dx = dy \Rightarrow x^3d(y^2) + y^2d(x^3) = dy \Rightarrow d(x^3y^2) = dy$
 $x^3y^2 = y + C$

(iii) $\frac{x dy - ydx}{x^2} = x^8 y^4 (3ydx + 4x dy)$

$$\Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = x^6y(3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy) \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = x^6y(3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy)$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{x^3} d\left(\frac{y}{x}\right) = x^3y^4d(x^3y^4) \Rightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} \right)^4 = \frac{x^6 \cdot y^8}{2} + C$$

D-2. Solve हल कीजिए—

(i) $y(x^2y + e^x) dx = e^x dy$

(ii) $2y \sin x \frac{dy}{dx} + y^2 \cos x + 2x = 0$

(iii) $(1 + x \sqrt{x^2 + y^2}) dx + y(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$

Ans. (i) $\frac{1}{y} e^x = -\frac{x^3}{3} + C$ (ii) $y^2 \sin x = -x^2 + C$

(iii) $x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3} (x^2 + y^2)^{3/2} + C = 0$

Sol.

(i) $y(x^2y + e^x) dx = e^x dy$

$x^2y^2 dx + e^xy dx = e^x dy$

$$-x^2dx = \frac{e^xy dx - e^x dy}{y^2} \Rightarrow -\frac{x^3}{3} = d\left(\frac{e^x}{y}\right) \Rightarrow -\frac{x^3}{3} = \frac{e^x}{y} + C$$

(ii) $2y \sin x dy + (y^2 \cos x + 2x) dx = 0 \Rightarrow d(y^2 \sin x) + 2xdx = 0 \Rightarrow y^2 \sin x = -x^2 + C$

(iii) $dx - ydx + \sqrt{x^2 + y^2} (xdx + ydy) = 0$

$$dx - ydy + \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = 0$$

$$x - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{3} (x^2 + y^2)^{3/2} + C = 0$$

D-3. Solve हल कीजिए—

(i) $\left(y - x \frac{dy}{dx}\right) \left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = \frac{dy}{dx}$

Ans. General solution व्यापक हल : $y = cx + \frac{C}{c-1}$

Singular solution विचित्र हल : $y = (\sqrt{x} \pm 1)^2$

(ii) $y + x \cdot \frac{dy}{dx} = x^4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Ans. General solution व्यापक हल : $xy + C = C^2x$



Singular solution विचित्र हल : $4x^2y + 1 = 0$

Sol.

(i) Let माना $\frac{dy}{dx} = m$

$$\Rightarrow (y - xm)(m - 1) = m$$

$$\Rightarrow y = mx + \frac{m}{m-1} \quad \dots(1)$$

$$y = mx + 1 + \frac{1}{m-1}$$

differentiating w.r.t x

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = m + x \frac{dm}{dx} - \frac{1}{(m-1)^2} \frac{dm}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dx} \left(x - \frac{1}{(m-1)^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dm}{dx} = 0 \dots\dots\dots \Rightarrow m = c \quad \dots(2)$$

or

$$x - \frac{1}{(m-1)^2} = 0 \quad \dots(3)$$

eliminating m from equation (1) & (2) gives general solution of differential equation
समीकरण (1) व (2) से m को हटाने पर, अवकल समीकरण व्यापक हल प्राप्त होता है।

$$y = cx + \frac{c}{c-1}$$

Now eliminating m from equation (1) and (3)

समीकरण (1) और (3) से m को विलोपित करने पर

$$(m-1)^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow m-1 = \pm \frac{1}{\sqrt{x}} \\ m = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = m \left(x + \frac{1}{m-1} \right)$$

$$\Rightarrow y = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x \pm \sqrt{x})$$

$$y = (\sqrt{x} \pm 1)^2 \quad \text{singular solution विचित्र हल}$$

(ii) Let माना $\frac{dy}{dx} = m$

$$y + xm = x^4(m^2) \quad \dots(1)$$

differentiating w.r.t x x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} + m + x \frac{dm}{dx} = x^4(2m) \frac{dm}{dx} + 4(m^2)x^3$$

$$2m + x \frac{dm}{dx} = 2mx^3 \left[2m + x \frac{dm}{dx} \right]$$

$$\Rightarrow \left(2m + x \frac{dm}{dx} \right) (1 - 2mx^3) = 0$$

$$\Rightarrow 2m + x \frac{dm}{dx} = 0 \quad \text{or} \quad 1 - 2mx^3 = 0 \quad \dots(2)$$



$$\frac{2dx}{x} + \frac{dm}{m} = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln x + \ln m = \ln c$$

$$\Rightarrow mx^2 = c \quad \dots(3)$$

eliminating m from (1) & (3) (1) और (3) से m को विलोपित करने पर

$$y + c = c^2$$

$$\Rightarrow xy + c = c^2x \quad \text{general solution व्यापक हल}$$

eliminating m from (1) & (2) (1) और (2) से m को हटाने पर

$$m = \frac{1}{2x^3}$$

$$y + xm = x^4(m^2)$$

$$y + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{4x^2}$$

$$4x^2y + 1 = 0 \text{ singular solution विचित्र हल}$$

D-4. Solve (here $y_1 = \frac{dy}{dx}$ and $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$) [16JM120597]

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$ (ii) $\frac{d^3y}{dx^3} = 8 \frac{d^2y}{dx^2}$ satisfying $y(0) = \frac{1}{8}$, $y_1(0) = 0$ and $y_2(0) = 1$.

हल कीजिए—

($y_1 = \frac{dy}{dx}$ और $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$)

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$ (ii) $\frac{d^3y}{dx^3} = 8 \frac{d^2y}{dx^2}$ जहाँ $y(0) = \frac{1}{8}$, $y_1(0) = 0$ एवं $y_2(0) = 1$.

Ans. (i) $c_1 e^x + c_2$ (ii) $64y = (e^{8x} - 8x) + 7$

Sol. (i) $\frac{dm}{dx} = m$

$$\ln m = x + k \Rightarrow m = e^x \cdot e^k \Rightarrow m = c_1 e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 e^x$$

$$y = c_1 e^x + c_2$$

(ii) Let माना $t = \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dt}{dx} = 8t$$

$$\ln t = 8x + c \quad \text{here यहाँ} \quad \text{at } x = 0, c = 0$$

$$t = e^{8x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = e^{8x}$$

now put अब $m = \frac{dy}{dx}$ रखने पर

$$\frac{dm}{dx} = e^{8x}$$

$$m = \frac{e^{8x}}{8} + c_1$$

at $x = 0$ ($x = 0$ पर), $c_1 = \frac{-1}{8}$





$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{8x}}{8} - \frac{1}{8}$$

$$y = \frac{e^{8x}}{64} - \frac{x}{8} + C_2$$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Section (A) : Degree & Order, Differential equation formation

खण्ड (A) : घात एवं कोटि, अवकल समीकरण बनाना

A-1. The order and degree of the differential equation

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \text{ are respectively}$$

- (A*) 2, 2 (B) 2, 3 (C) 2, 1 (D) none of these

अवकल समीकरण $r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ की कोटि और घात क्रमशः है –

- (A) 2, 2 (B) 2, 3 (C) 2, 1 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 r^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$

order कोटि : 2
degree घात : 2

A-2. The order of the differential equation whose general solution is given by

$$y = (C_1 + C_2) \sin(x + C_3) - C_4 e^{x+C_5} \text{ is } \quad [16JM120598]$$

व्यापक हल $y = (C_1 + C_2) \sin(x + C_3) - C_4 e^{x+C_5}$ वाले अवकल समीकरण की कोटि है –

- (A) 5 (B) 4 (C) 2 (D*) 3

Sol. $y = k_1 \sin(x + C_3) - k_2 e^x \quad k_1 : C_1 + C_2 ; k_2 = C_4 e^{C_5}$

order कोटि : 3

A-3. The order and degree of differential equation of all tangent lines to parabola $x^2 = 4y$ is परवलय $x^2 = 4y$ की सभी स्पर्श रेखाओं की अवकल समीकरण की कोटि और घात है –

- (A*) 1, 2 (B) 2, 2 (C) 3, 1 (D) 4, 1

Sol. tangent to $x^2 = 4y$ $x^2 = 4y$ की स्पर्श रेखा

$$x = my + \frac{1}{m}$$

$$m = \frac{dy}{dx} \Rightarrow x = y \left(\frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{(dy/dx)}$$

$$\Rightarrow x \left(\frac{dy}{dx} \right) = y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1$$



∴ order = 1 degree = 2
 ∴ कोटि = 1 घात = 2

A-4. If p and q are order and degree of differential equation $y^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + 3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^{1/3} + x^2y^2 = \sin x$, then :

यदि अवकल समीकरण $y^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + 3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^{1/3} + x^2y^2 = \sin x$, की कोटि और घात क्रमशः p और q हो, तो –

(A) $p > q$ (B) $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ (C) $p = q$ (D*) $p < q$

Sol. $y^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + x^2y^2 - \sin x = -3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^{1/3}$

$$\left(y^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + x^2y^2 - \sin x \right)^3 = -9x^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

here order = 2 = p

Degree = 6 = q ∴ $p < q$

Hindi. $y^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + x^2y^2 - \sin x = -3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^{1/3}$

$$\left(y^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 + x^2y^2 - \sin x \right)^3 = -9x^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

यहाँ कोटि = 2 = p

घात = 6 = q ∴ $p < q$

A-5. Family $y = Ax + A^3$ of curve represented by the differential equation of degree (A*) three (B) two (C) one (D) four

वक्र निकाय $y = Ax + A^3$ जिस अवकल समीकरण द्वारा निरूपित होती है उसकी घात है –

(A) तीन (B) दो (C) एक (D) चार

Sol. $y = Ax + A^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = A$

∴ $y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3$ Degree घात = 3

A-6. The differential equation whose solution is $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ is (a is a constant)

(A) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3 = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ (B*) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3 = a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2$ [16JM120599]

(C) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3 = a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2$ (D) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2 = a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^3$

अवकल समीकरण जिसका हल $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ हो, है (a नियतांक है) –

(A) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3 = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ (B*) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3 = a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2$

(C) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^3 = a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2$ (D) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2 = a^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^3$



Sol. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ (1)

$2(x - h) + 2(y - k) \frac{dy}{dx} = 0$ (2)

$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - k) \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (3)

From (3) we have $(y - k)$, use in (2) to get $(x - h)$ and put $(x - h)$ and $(y - k)$ in (1)

(3) से $(y - k)$ समीकरण (2) में रखने पर $(x - h)$ प्राप्त होता है तथा $(x - h)$ एवं $(y - k)$ को समीकरण (1) में रखने पर

A-7. The differential equations of all conics whose centre lie at the origin is of order :

(A) 2 (B*) 3 (C) 4 (D) none of these

सभी शांकवों जिनका केन्द्र मूलबिन्दु पर स्थित है, के अवकल समीकरण की कोटि है -

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$
 $f = 0, g = 0$

then तब $x^2 + 2\frac{h}{a}xy + \frac{b}{a}y^2 + \frac{c}{a} = 0$

$x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 + \gamma = 0$

order कोटि : 3

A-8. The differential equation for all the straight lines which are at a unit distance from the origin is

मूलबिन्दु से इकाई दूरी पर स्थित सभी सरल रेखाओं की अवकल समीकरण है -

(A) $\left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (B) $\left(y + x \frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(C*) $\left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ (D) $\left(y + x \frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Sol. Let equation of St. Line

$Y - y = m(X - x)$

Distance from origin $\Rightarrow \left| \frac{mx - y}{\sqrt{1 + m^2}} \right| = 1$

$\therefore (mx - y)^2 = 1 + m^2$

$\left(y - \frac{dy}{dx}x\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Hindi माना सरल रेखा का समीकरण

$Y - y = m(X - x)$

मूलबिन्दु से दूरी $\Rightarrow \left| \frac{mx - y}{\sqrt{1 + m^2}} \right| = 1$

$\therefore (mx - y)^2 = 1 + m^2$

$\left(y - \frac{dy}{dx}x\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Section (B) : Variable separable, Homogeneous equation, polar substitution

खण्ड (B) : चर पृथक्करण, समघात समीकरण, ध्रुवीय प्रतिस्थापन

B-1. If $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$ and $y = 0$ when $x = 5$, the value of x for $y = 3$ is



Resonance
Educating for better tomorrow

Reg. & Corp. Office : CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in

Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 20



यदि $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$ और $y = 0$ जब $x = 5$ हो, तो $y = 3$ के लिए $x =$

- (A) e^5 (B) $e^6 + 1$ (C*) $\frac{e^6 + 9}{2}$ (D) $\log_e 6$

Sol. $\frac{dy}{dx} = e^{-2y} \Rightarrow \frac{e^{2y}}{2} = x + c$

$$y = 0, x = 5 \Rightarrow c = -\frac{9}{2}$$

$$y(x_0) = 3$$

$$\Rightarrow \frac{e^6}{2} = x_0 - \frac{9}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{e^6 + 9}{2}$$

B-2. If $\phi(x) = \phi'(x)$ and $\phi(1) = 2$, then $\phi(3)$ equals

[16JM120600]

यदि $\phi(x) = \phi'(x)$ और $\phi(1) = 2$ हो, तो $\phi(3) =$

- (A) e^2 (B*) $2e^2$ (C) $3e^2$ (D) $2e^3$

Sol. $\phi(x) = \phi'(x)$ $\phi(1) = 2$

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi$$

$$\ln \phi(x) = x + c$$

$$\ln 2 = 1 + c \Rightarrow c = \ln 2 - 1$$

$$\ln \phi(3) = 3 + c = 2 + \ln 2$$

$$\Rightarrow \phi(3) = 2e^2$$

B-3. If $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ and $y(-1) = 0$, then function y is

यदि $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ और $y(-1) = 0$ हो, तो फलन y है -

- (A) $e^{(1-x)^2/2}$ (B*) $e^{(1+x)^2/2} - 1$ (C) $\log_e(1+x) - 1$ (D) $1+x$

Sol. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy = (1+x)(1+y) \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x) dx \Rightarrow \ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$

$$y(-1) = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\ln(1+y) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{(1+x)^2}{2} - 1 \Rightarrow y = e^{\frac{(1+x)^2}{2}} - 1$$

B-4. The value of $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ obtained from the differential equation $\frac{dy}{dx} = y - y^2$, where $y(0) = 2$ is

[16JM120601]

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y - y^2$, जहाँ $y(0) = 2$ से प्राप्त $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ का मान है -

- (A*) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $\frac{2}{2-e}$

Sol. $\frac{dy}{dx} = y - y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{y-y^2} = \int dx$

$$\int \frac{1}{1-y} + \frac{1}{y} dy = x + c \Rightarrow \ln \frac{y}{1-y} = x + c$$

$$\frac{y}{1-y} = ke^x \Rightarrow y = ke^x - kye^x \Rightarrow y = \frac{ke^x}{1+ke^x}$$



$$x = 0, y = 2; 2 = \frac{k}{1+k} \Rightarrow 2 + 2k = k \Rightarrow k = -2, y = \frac{-2e^x}{1-2e^x} \Rightarrow y = \frac{-2}{e^{-x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{e^{-x} - 2} = 1$$

B-5. The solution of $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ {where $x, y \in (-1, 1)$ } is

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0 \text{ {जबकि } } x, y \in (-1, 1) \text{ का हल है -}$$

(A) $\sin^{-1} x \sin^{-1} y = C$ (B) $\sin^{-1} x = C \sin^{-1} y$ (C) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = C$ (D*) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = C$

Sol. $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow -\sin^{-1} y = \sin^{-1} x + c$$

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = c$$

B-6. Integral curve satisfying $y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, $y(1) = 2$, has the slope at the point (1, 2) of the curve, equal to **[16JM120602]**

$y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, $y(1) = 2$ को संतुष्ट करने वाले समाकल वक्र (Integral curve) के बिन्दु (1, 2) पर प्रवणता है -

(A*) $-\frac{5}{3}$ (B) -1 (C) 1 (D) $\frac{5}{3}$

Sol. $y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$; $y'_{(1,2)} = \frac{1+4}{1-4} = \frac{-5}{3}$

B-7. Solution of differential equation $xdy - y dx = 0$ represents :

(A) rectangular hyperbola (B*) straight line passing through origin
(C) parabola whose vertex is at origin (D) circle whose centre is at origin

अवकल समीकरण $xdy - y dx = 0$ का हल निरूपित करता है -

(A) आयतीय अतिपरवलय (B) मूलबिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा
(C) परवलय जिसका शीर्ष मूलबिन्दु है। (D) वृत्त जिसका केन्द्र मूलबिन्दु है।

Sol. $x dy = y dx$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y - \ln x = c$$

$$y = kx \therefore \text{straight line passing through origin}$$

$$\therefore \text{मूल बिन्दु से गुजरने वाली सरल रेखा}$$

B-8. The slope of a curve at any point is the reciprocal of twice the ordinate at that point and it passes through the point (4, 3). The equation of the curve is

एक वक्र के किसी बिन्दु पर प्रवणता उस बिन्दु की कोटि के दुगुने के व्युत्क्रम के बराबर है और यह बिन्दु (4, 3) से गुजरता है, तो वक्र का समीकरण है -

(A) $x^2 = y + 5$ (B) $y^2 = x - 5$ (C*) $y^2 = x + 5$ (D) $x^2 = y + 5$

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \Rightarrow y^2 = x + c$

$$\therefore (4, 3) \text{ satisfies}$$

$$\therefore \text{इसे } (4, 3) \text{ संतुष्ट करता है।}$$



$$\Rightarrow 9 = 4 + c \Rightarrow c = 5 \quad \therefore y^2 = x + 5$$

B-9. Solution of differential equation $x(xdx - ydy) = 4\sqrt{x^2 - y^2} (xdy - ydx)$ is

अवकल समीकरण $x(xdx - ydy) = 4\sqrt{x^2 - y^2} (xdy - ydx)$ का हल है—

(A) $\sqrt{x^2 - y^2} = Ae^{4\sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)}$

(B) $\sqrt{x^2 + y^2} = Ae^{4\cos^{-1}x}$

(C) $\sqrt{x^2 - y^2} = Ae^{4\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

(D*) $\sqrt{x^2 - y^2} = Ae^{4\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

Sol.

Let माना $x = r \sec\theta$, $y = r \tan\theta$
 $\Rightarrow x^2 - y^2 = r^2 \Rightarrow xdx - ydy = rdr$
 $\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \frac{xdy - ydx}{x^2} = \sec^2\theta d\theta$

$\Rightarrow xdy - ydx = r^2 \sec^2\theta d\theta$
 $x(xdx - ydy) = 4(xdy - ydx)$

$\Rightarrow r \sec\theta (rdr) = 4\sqrt{x^2 - y^2} \cdot r (r^2 \sec^2\theta d\theta) \Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int 4d\theta \Rightarrow \ln r = 4\theta + c$

$\Rightarrow r = Ae^{4\theta} \Rightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = Ae^{4\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

ALITER : $\frac{\frac{1}{2}d(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 4x \cdot \frac{xdy - ydx}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}d(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = 4x \cdot \frac{d(y/x)}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}d(\ln(x^2 - y^2)) = \frac{4}{\sqrt{1 - (y/x)^2}} d(y/x) \Rightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = Ae^{4\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$

B-10. Let normal at point P on curve intersect on x-axis at N and foot of P on x-axis is P'. If P'N is always constant for any point P on curve, then equation of curve is

माना कि वक्र के बिन्दु P पर अभिलम्ब, x-अक्ष को N पर प्रतिच्छेद करता है तथा P से x-अक्ष पर लम्बपाद P' है। यदि P'N वक्र पर किसी बिन्दु P के लिए सदैव अचर है, तब वक्र का समीकरण है—

(A) $y = ax + b$

(B*) $y^2 = 2ax + b$

(C) $ay^2 - x^2 = a$

(D) $ay^2 + x^2 = a$

Sol.

$L_{SN} = y \frac{dy}{dx}$

$y \frac{dy}{dx} = c \Rightarrow \frac{y^2}{2} = Cx + C_2$

Section (C) : Linear upon linear, Linear diff. eq. & Bernoulli's diff. eq.

खण्ड (C) : रैखिक भाग, रैखिक अवकल समीकरण एवं बर्नौली अवकल समीकरण

C-1. Solution of D.E. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+5y}{2y-5x+3}$ is, (if $(y(0) = 0)$)

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+5y}{2y-5x+3}$ का हल है।, (यदि $(y(0) = 0)$)

(A*) $x^2 - y^2 + 5xy - 3y = 0$

(B) $x^2 + y^2 + 5xy - 3y = 0$

(C) $x^2 - y^2 + 5xy + 3y = 0$

(D) $x^2 - y^2 - 5xy - 3y = 0$

Sol.

$2ydy - 5xdy + 3dy = 2xdx + 5ydx$

$d(y^2) + 3dy = d(x^2) + 5d(xy)$

$y^2 + 3y = x^2 + 5xy + C$

$0 + 0 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 0$

$x^2 - y^2 + 5xy - 3y = 0$





C-2. Solution of D.E. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+4y+3}{12x+16y-4}$ is

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+4y+3}{12x+16y-4}$ का हल है।

(A) $y=4x + \ln|3x+4y| + C$

(B*) $4y=x + \ln|3x+4y| + C$

(C) $y=\ln|3x+4y| + C$

(D) $x+y=\ln|3x+4y| + C$

Sol. $3x+4y=t \Rightarrow 3+4\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$$\frac{dt}{dx} - 3 = \frac{t+3}{t-1} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t+3}{t-1} + 3 = \frac{t+3+3t-3}{t-1}$$

$$\int \frac{t-1}{t} dt = \int 4dx \Rightarrow t - \ln|t| = 4x + C$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - \ln|3x+4y| = 4x + C$$

$$\Rightarrow 4y = x + \ln|3x+4y| = 4x + C$$

C-3. Solution of D.E. $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g$ is

[16JM120603]

अवकल समीकरण $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g$ का हल है।

(A*) $v = ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$ (B) $v = c - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$ (C) $v e^{-\frac{k}{m}t} = c - \frac{mg}{k}$ (D) $v e^{\frac{k}{m}t} = c - \frac{mg}{k}$

Sol. $\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m} v = -g$

Integrating factor (I.F.) = $e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{K}{m}t}$

समाकल गुणांक (I.F.) = $e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{K}{m}t}$

$$\therefore V e^{\frac{K}{m}t} = - \int g e^{K.t/m}$$

$$V e^{\frac{K}{m}t} = \frac{-gm}{K} e^{\frac{K}{m}t} + c$$

$$V = C \cdot e^{-\frac{K}{m}t} - \frac{mg}{K}$$

C-4. Solution of differential equation $4y^3 \frac{dy}{dx} + \frac{y^4}{x} = x^3$ is

अवकल समीकरण $4y^3 \frac{dy}{dx} + \frac{y^4}{x} = x^3$ का हल है।

(A) $y^4 \cdot x^5 = \frac{x}{5} + C$

(B) $y^4 = \frac{x^5}{5} + C$

(C) $y^4 \cdot x = x^5 + C$

(D*) $y^4 \cdot x = \frac{x^5}{5} + C$

Sol. $y^4 = t \Rightarrow 4y^3 dy = dt$

$$\frac{dt}{dx} + \frac{1}{x} \cdot t = x^3$$

$$te^{\ln x} = \int x^3 \cdot x dx$$

$$y^4 \cdot x = \frac{x^5}{5} + C$$





C-5. Solution of differential equation $\sin y \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cos y = x^4 \cos^2 y$ is

अवकल समीकरण $\sin y \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cos y = x^4 \cos^2 y$ का हल है।

(A) $x \sec y = x^6 + C$

(B) $6x \sec y = x + C$

(C*) $6x \sec y = x^6 + C$

(D) $6x \sec y = 6x^6 + C$

Sol. $\sec y \tan y \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \sec y = x^4$

$\sec y = t$

$\sec y \cdot \tan y \, dy = dt$

$\frac{dt}{dx} + \frac{1}{x} \cdot t = x^4$

$t \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = \int x \cdot x^4 dx$

$x \sec y = \frac{x^6}{6} + C'$

$6x \sec y = x^6 + C$

Section (D) : Exact differential equation, Higher degree & Higher Order differential equation

खण्ड (D) : यथार्थ अवकल समीकरण, उच्च घात एवं उच्च कोटि की अवकल समीकरण

D-1. Solution of differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y + 3x^4 + y}{x - x^4}$ is

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3y + 3x^4 + y}{x - x^4}$ का हल है -

(A*) $x^2y + x^3 = \frac{y}{x} + C$

(B) $x^2y + 2x^3 = \frac{y}{x} + C$

(C) $x^2y + x^3 = \frac{2y}{x} + C$

(D) $y + x^3 = \frac{y}{x} + C$

Sol. $(2x^3y + 3x^4 + y) dx = (x - x^4) dy$

$2yx dx + x^2 dy + 3x^2 dx = \frac{xdy - ydx}{x^2} \Rightarrow d(x^2y) + d(x^3) = d\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow x^2y + x^3 = \frac{y}{x} + C$

D-2. Solution of differential equation $xy = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} dx - ydx$ is

अवकल समीकरण $xy = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} dx - ydx$ का हल है -

(A) $\ell n(x+y) = \sin^{-1}x + C$

(B*) $\ell n(xy) = \sin^{-1}x + C$

(C) $2\ell n(xy) = \sin^{-1}x + C$

(D) $\ell n(xy) = 2\sin^{-1}x + C$

Sol. $xy = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} dx - ydx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{xy} d(xy) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow \ell n(xy) = \sin^{-1}x + C$

D-3. Solution of differential equation $x^6 dy + 3x^5 y dx = xdy - 2y dx$ is

अवकल समीकरण $x^6 dy + 3x^5 y dx = xdy - 2y dx$ का हल है -

(A*) $x^3y = \frac{y}{x^2} + C$

(B) $x^3y = \frac{2y}{x^2} + C$

(C) $x^3y^2 = \frac{y}{x^2} + C$

(D) $x^3 = \frac{y}{x^2} + C$



Sol. $x^3 (x^3 dy + 3x^2 y dx) = \frac{x^2 dy - 2xy dx}{x} \Rightarrow d(x^3 y) = \frac{x^2 dy - yd(x^2)}{(x^2)^2} \Rightarrow x^3 y = \frac{y}{x^2} + C$

D-4. Solution of $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0$ is

अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0$ का हल है—

(A) $y = 3x^2 + 9$ (B*) $y = 3x + 9$ (C) $y = \frac{4}{3} x^2$ (D) $y = 9x + 3$

Sol. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0$

let माना $\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow m^2 + mx = y \dots(1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = m + x \frac{dm}{dx} + 2m \frac{dm}{dx} \Rightarrow \frac{dm}{dx} (x + 2m) = 0$

$\Rightarrow \frac{dm}{dx} = 0$ or या $m = -\frac{x}{2} \Rightarrow m = c$ or या $m = -\frac{x}{2}$

putting in 1 में रखने पर

$y = c^2 + cx$ or या $y = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}$

$y = c^2 + cx$ $y = -\frac{x^2}{4}$

put $c = 3$ रखने पर
 $y = 3x + 9$

D-5. The equation of the curve satisfying the differential equation $y_2 (x^2 + 1) = 2xy_1$ passing through the point (0, 1) and having slope of tangent at $x = 0$ as 3, is (Here $y_1 = \frac{dy}{dx}$ and $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$) [16JM120604]

(A) $y = x^2 + 3x + 2$ (B) $y^2 = x^2 + 3x + 1$ (C*) $y = x^3 + 3x + 1$ (D) none of these

अवकल समीकरण $y_2 (x^2 + 1) = 2xy_1$ को सन्तुष्ट करने वाले तथा बिन्दु (0, 1) से गुजरने वाले एवं $x = 0$ पर स्पर्श रेखा

की प्रवणता 3 हो, वक्र का समीकरण है—($y_1 = \frac{dy}{dx}$ और $y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}$)

(A) $y = x^2 + 3x + 2$ (B) $y^2 = x^2 + 3x + 1$ (C*) $y = x^3 + 3x + 1$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\frac{d^2y}{dx^2} (x^2 + 1) = 2x \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \Rightarrow \ln \left(\frac{dy}{dx} \right) = \ln (x^2 + 1) + \ln c$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c(x^2 + 1) \Rightarrow c = 3$ as at $x = 0$ पर, $\frac{dy}{dx} = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 1) dx \Rightarrow y = x^3 + 3x + 1$

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. Match the following

Column - I

Column - II



(A) Solution of $y - \frac{xdy}{dx} = y^2 + \frac{dy}{dx}$ is

(p) $xy^2 = 2y^5 + c$

(B) Solution of $(2x - 10y^3) \frac{dy}{dx} + y = 0$ is

(q) $\sec y = x + 1 + ce^x$

(C) Solution of $\sec^2 y dy + \tan y dx = dx$ is

(r) $(x + 1)(1 - y) = cy$

(D) Solution of $\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y (1 - x \cos y)$ is

(s) $\tan y = 1 + ce^{-x}$

Ans: (A) – (r) (B) – (p) (C) – (s) (D) – (q)

मिलान कीजिए –
मिलान कीजिए –

स्तम्भ - I

स्तम्भ - II

(A) $y - \frac{xdy}{dx} = y^2 + \frac{dy}{dx}$ का हल है।

(p) $xy^2 = 2y^5 + c$

(B) $(2x - 10y^3) \frac{dy}{dx} + y = 0$ का हल है।

(q) $\sec y = x + 1 + ce^x$

(C) $\sec^2 y dy + \tan y dx = dx$ का हल है।

(r) $(x + 1)(1 - y) = cy$

(D) $\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y (1 - x \cos y)$ का हल है।

(s) $\tan y = 1 + ce^{-x}$

Ans: (A) – (r) (B) – (p) (C) – (s) (D) – (q)

Sol. (A) $\frac{ydx - xdy}{y^2} = dx + \frac{dy}{y^2} \Rightarrow d\left(\frac{x}{y}\right) = dx + \frac{dy}{y^2} \Rightarrow \frac{x}{y} = x - \frac{1}{y} + k$
 $\Rightarrow x = xy - 1 + ky \Rightarrow (x + 1)(1 - y) = cy$

(B) $(2x - 10y^3) \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{10y^3 - 2x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{10y^3 - 2x}{y}$
 $\frac{dx}{dy} = 10y^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = 10y^2 \Rightarrow xy^2 = 10\frac{y^5}{5} + c$
 $\Rightarrow xy^2 = 2y^5 + c$

(C) $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + \tan y = 1$ put $\tan y = t$ रखने पर $\sec^2 y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$
 $\Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 - t \Rightarrow \ln(1 - t) = -cx$
 $\Rightarrow 1 - t = e^{-cx} \Rightarrow t = 1 - e^{-cx} \Rightarrow \tan y = 1 + ce^{-x}$

(D) $\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y (1 - x \cos y)$
 put $\cos y = t$ रखने पर $-\sin y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$
 $\Rightarrow -\frac{dt}{dx} = t(1 - tx) \Rightarrow \sec y = x + 1 + ce^x$





2. Match the following

Column - I

(A) $x dy = y(dx + y dy)$, $y(1) = 1$ and $y(x_0) = -3$, then $x_0 =$

(B) If $y(t)$ is solution of $(t+1) \frac{dy}{dt} - ty = 1$,
 $y(0) = -1$, then $y(1) =$

(C) $(x^2 + y^2) dy = xy dx$ and $y(1) = 1$ and
 $y(x_0) = e$, then $x_0 =$

(D) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$, $y(1) = 1$, then $y(2) =$

Column - II

(p) $\frac{1}{4}$

(q) -15

(r) $-\frac{1}{2}$

(s) $\sqrt{3} e$

Ans: (A) – (q), (B) – (r), (C) – (s), (D) – (p)

मिलान कीजिए –

स्तम्भ - I

(A) $x dy = y(dx + y dy)$, $y > 0$
 $y(1) = 1$ और $y(x_0) = -3$, तब $x_0 =$

(B) यदि $(t+1) \frac{dy}{dt} - ty = 1$ का हल
 $y(t)$ है तथा $y(0) = -1$, तब $y(1) =$

(C) $(x^2 + y^2) dy = xy dx$ और $y(1) = 1$ एवं
 $y(x_0) = e$, तब $x_0 =$

(D) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$, $y(1) = 1$ तब $y(2) =$

स्तम्भ - II

(p) $\frac{1}{4}$

(q) -15

(r) $-\frac{1}{2}$

(s) $\sqrt{3} e$

Ans: (A) – (q), (B) – (r), (C) – (s), (D) – (p)

Sol. (A) $x dy = y dx + y^2 dy \Rightarrow \frac{x dy - y dx}{y^2} = dy \Rightarrow -d\left(\frac{x}{y}\right) = dy$

$-\frac{x}{y} = y + c$ put $x = 1$ रखने पर $y = 1 \Rightarrow c = -2$

$-\frac{x}{y} = y - 2 \Rightarrow \frac{x}{3} = -5$

(B) $\frac{dy}{dt} - \frac{t}{t+1} y = \frac{1}{t+1}$

I.F. (समाकल गुणांक) $= e^{-\int \frac{t+1-1}{t+1} dt} = e^{-t + \ln(t+1)} = (t+1) e^{-t}$

हल solution is $(t+1)e^{-t} y = -e^{-t} + c$ put $t = 0$ एवं $y = -1$ रखने पर $\Rightarrow c = 0$

$\therefore 2e^{-1} y = -e^{-1}$

$y = -\frac{1}{2}$

(C) $(x^2 + y^2) dy = xy dx$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ put } y = vx \text{ रखने पर } \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \ln v - \frac{1}{2v^2} = -\ln x + c$$

$$\therefore c = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \ln \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} = -\ln x - \frac{1}{2} \quad \text{put } y = e \text{ रखने पर}$$

$$\therefore x = \sqrt{3} e$$

$$(D) \frac{dy}{dx} + 2 \frac{y}{x} = 0$$

$$x^2 y = C \quad \text{put } x = 1, y = 1 \text{ रखने पर and we get } C = 1$$

$$\text{put } x = 2 \text{ रखने पर } \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$





Exercise-2

Marked questions are recommended for Revision.

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

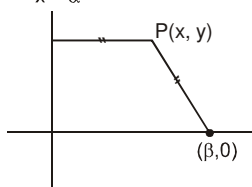
1. The differential equation of all parabola having their axis of symmetry coinciding with the x-axis is

(A*) $y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (B) $y \frac{d^2 x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$ (C) $y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ (D) none of these

उन सभी परवलयों के अवकल समीकरण जिनके सममिति अक्ष, x-अक्ष के संपाती है— [16JM120607]

(A*) $y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (B) $y \frac{d^2 x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0$ (C) $y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Directrix $\perp$ to x axis, Let $x = \alpha$ and focus on x axis Let $(\beta, 0)$, Now



$$(x - \beta)^2 + y^2 = (x - \alpha)^2$$

$$\beta^2 - 2\beta x + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha x$$

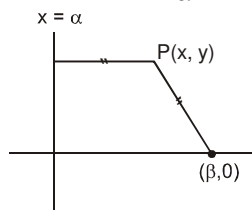
$$y^2 = 2(\beta - \alpha)x + \alpha^2 - \beta^2$$

In general $y^2 = mx + c$ (Two arbitrary constant m and c)

$$2y \frac{dy}{dx} = m$$

$$2y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

Hindi. x अक्ष के लम्बवत् नियता माना $x = \alpha$ तथा नाभि x अक्ष पर माना $(\beta, 0)$ है।



$$(x - \beta)^2 + y^2 = (x - \alpha)^2$$

$$\beta^2 - 2\beta x + y^2 = \alpha^2 - 2\alpha x$$

$$y^2 = 2(\beta - \alpha)x + \alpha^2 - \beta^2$$

व्यापक रूप में $y^2 = mx + c$ (दो स्वच्छ अक्षर m एवं c हैं)

$$2y \frac{dy}{dx} = m$$

$$2y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$



Resonance
Educating for better tomorrow

Corporate Office: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005

Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in

Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 1



2. If $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are two solutions of $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ then $y_1(x) + y_2(x)$ is solution of :

यदि $y_1(x)$ और $y_2(x)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ के दो हल हों, तो $y_1(x) + y_2(x)$ निम्न में से किसका हल है ? [16JM120605]

(A) $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$

(B) $\frac{dy}{dx} + 2f(x)y = r(x)$

(C*) $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 2r(x)$

(D) $\frac{dy}{dx} + 2f(x)y = 2r(x)$

Sol. $\frac{dy_1}{dx} + fy_1 = r$

$\frac{dy_2}{dx} + fy_2 = r$

Add जोड़ने पर $\frac{d}{dx}(y_1 + y_2) + f(y_1 + y_2) = 2r$

here यहाँ $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 2r$

3. If $y_1(x)$ is a solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$, then a solution of differential equation $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ is

(A) $\frac{1}{y_1(x)} \int y_1(x) dx$ (B*) $y_1(x) \int \frac{r(x)}{y_1(x)} dx$ (C) $\int r(x)y_1(x) dx$ (D) none of these

यदि $y_1(x)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0$ का एक हल हो, तो अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + f(x)y = r(x)$ का हल है —

(A) $\frac{1}{y_1(x)} \int y_1(x) dx$ (B*) $y_1(x) \int \frac{r(x)}{y_1(x)} dx$ (C) $\int r(x)y_1(x) dx$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. (i) $\frac{dy_1}{dx} + f(x)y_1 = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx}$

(ii) $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} \cdot y = r(x)$

$e^{-\int \frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} dx} = e^{-\int \frac{dy_1}{y_1}} = \frac{1}{y_1}$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = \frac{r(x)}{y_1} \Rightarrow \frac{y}{y_1} = \int \frac{r(x) dx}{y_1}$

$y = y_1 \int \frac{r(x) dx}{y_1}$

4. The solution of $y dx - x dy + 3x^2 y^2 e^{x^3} dx = 0$ is

(A*) $\frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ (B) $\frac{x}{y} - e^{x^3} = 0$ (C) $-\frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ (D) $\frac{y}{x} + e^{x^3} = c$

$y dx - x dy + 3x^2 y^2 e^{x^3} dx = 0$ का हल है —

(A) $\frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ (B) $\frac{x}{y} - e^{x^3} = 0$ (C) $-\frac{x}{y} + e^{x^3} = C$ (D) $\frac{y}{x} + e^{x^3} = c$





Sol. $(y + 3x^2y^2e^{x^3})dx = x dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + 3x^2y^2e^{x^3}}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2(3xe^{x^3})$
 $\Rightarrow \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{xy} = 3xe^{x^3}$

put $-\frac{1}{y} = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{t}{x} = 3xe^{x^3}$ I.F. = $e^{\int \frac{dx}{x}} = x$

$-\frac{1}{y} = t$ रखने पर $\frac{dt}{dx} + \frac{t}{x} = 3xe^{x^3}$ समाकल गुणांक (I.F.) = $e^{\int \frac{dx}{x}} = x$

$\frac{d}{dx} (tx) = 3x^2e^{x^3} \Rightarrow tx = \int 3x^2e^{x^3} dx \Rightarrow \frac{-x}{y} = e^{x^3} + c$

5. The solution of the differential equation $(x^2 \sin^3 y - y^2 \cos x) dx + (x^3 \cos y \sin^2 y - 2y \sin x) dy = 0$ is

अवकल समीकरण $(x^2 \sin^3 y - y^2 \cos x) dx + (x^3 \cos y \sin^2 y - 2y \sin x) dy = 0$ का हल है -

- (A*) $x^3 \sin^3 y = 3y^2 \sin x + C$ (B) $x^3 \sin^3 y + 3y^2 \sin x = C$
 (C) $x^2 \sin^3 y + y^3 \sin x = C$ (D) $2x^2 \sin y + y^2 \sin x = C$

Sol. $(x^3 \cos y \sin^2 y - 2y \sin x) dy - (y^2 \cos x - x^2 \sin^3 y) dx = 0$

$\left(\frac{x^3}{3} d\sin^3 y - \sin x dy^2 \right) + \sin^3 y d\left(\frac{x^3}{3} \right) - y^2 d\sin x = 0$

$\frac{x^3}{3} d\sin^3 y + \sin^3 y d\left(\frac{x^3}{3} \right) - (\sin x dy^2 + y^2 d\sin x)$

$d\left(\frac{x^3}{3} \sin^3 y \right) - d(y^2 \sin x) = 0$

$\frac{x^3}{3} \sin^3 y - y^2 \sin x = c$

6. Solve : $\frac{xdy}{dx} - \frac{x^3 e^{\frac{-y}{x}}}{2} (\pi + 2) = y + 2x^2$ का हल है-

- (A) $e^{\frac{y}{x}} = -\frac{\pi+1}{8}(1+2x) + ce^{2x}$ (B) $e^{\frac{y}{x}} = -\frac{\pi+1}{8}(1+2x) + ce^{3x}$
 (C) $e^{\frac{x}{y}} = -\frac{\pi+1}{8}(1+2x) + ce^{3x}$ (D*) $e^{\frac{y}{x}} = -\frac{\pi+2}{8}(1+2x) + ce^{2x}$

Sol. Put $\frac{y}{x} = t$ रखने पर

$\Rightarrow e^{\frac{y}{x}} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) = x^2 \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow x \frac{dy}{dx} - y = \frac{x^2}{t} \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{t} \frac{dt}{dx} - \frac{x^3}{2t} (\pi + 2) = 2x^2$
 $\frac{dt}{dx} - 2t = \frac{x}{2} (\pi + 2)$

I.F. = e^{-2x}

$t e^{-2x} = \int e^{-2x} \frac{x}{2} (\pi + 2) dx + c$

$\Rightarrow t e^{-2x} = \frac{\pi+2}{2} \int e^{-2x} x dx + c = \frac{\pi+2}{2} \left[\frac{x e^{-2x}}{-2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} dx \right] + c$





$$= \frac{\pi+2}{4} \left[-xe^{-2x} - \frac{e^{-2x}}{2} \right] + c \Rightarrow te^{-2x} = -\frac{(\pi+2)}{8} e^{-2x} (1+2x) + c$$

$$\Rightarrow t = \frac{-(\pi+2)}{8} (1+2x) + ce^{2x} \Rightarrow \frac{y}{e^x} = -\frac{\pi+2}{8} (1+2x) + ce^{2x}$$

7. Solution of differential equation $xy(my dx + nx dy) = \frac{xdy + ydx}{x^m y^n}$, given $m + n = 1$, is

अवकल समीकरण का $xy(my dx + nx dy) = \frac{xdy + ydx}{x^m y^n}$ का हल है — जहाँ $m + n = 1$, is

- (A) $x^{m+1} \cdot y^{n+1} + 1 = c(x/y)$
 (B*) $x^{m+1} \cdot y^{n+1} + 1 = cxy$
 (C) $x^{m+1} \cdot y^{n+1} - 1 = cxy$
 (D) $x^m \cdot y^n + 1 = cxy$.

Sol. By rearranging the terms we have
 पदों का व्यवस्थीकरण करने पर

$$x^{m-1} y^{n-1} (my dx + nx dy) = \frac{xdy + ydx}{x^2 y^2}$$

$$\Rightarrow d(x^m y^n) = d \left(-\frac{1}{xy} + c \right)$$

$$\Rightarrow x^m y^n = -\frac{1}{xy} + c$$

$$\Rightarrow x^{m+1} \cdot y^{n+1} + 1 = cxy.$$

8. The equation of the curve which is such that the portion of the axis of x cut off between the origin and tangent at any point is proportional to the ordinate of that point is

- (A*) $x = y(b - a \log y)$ (B) $\log x = by^2 + a$ [16JM120606]
 (C) $x^2 = y(a - b \log y)$ (D) $y = x(b - a \log x)$

(a is constant of proportionality)

एक वक्र इस प्रकार है कि मूलबिन्दु और वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा के मध्य कटा x -अक्ष का भाग उस बिन्दु की कोटि के समानुपाती है, तो वक्र का समीकरण है —

- (A) $x = y(b - a \log y)$ (B) $\log x = by^2 + a$
 (C) $x^2 = y(a - b \log y)$ (D) $y = x(b - a \log x)$
 (a समानुपाती नियतांक है।)

Sol. $Y - y = m(x - x)$

$$X_{int} = \frac{-y}{m} + x = ay$$

$$\frac{-y}{m} = ay - x \Rightarrow m = \frac{y}{x - ay} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - ay}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -a$$

$$I.F. = e^{\int \frac{1}{y} dy} = \frac{1}{y}$$

$$x \cdot \frac{1}{y} = -a \int \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{x}{y} = -a \log y + b$$

$$x = y(b - a \log y)$$





9. A curve passing through the point (1, 1) has the property that the perpendicular distance of the origin from the normal at any point P of the curve is equal to the distance of P from the x-axis. Then equation of the curve is. **[16JM120608]**

बिन्दु (1, 1) से गुजरने वाले एक वक्र का गुणधर्म है कि वक्र के किसी बिन्दु P पर अभिलम्ब की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी, P से x-अक्ष की दूरी के बराबर होती है। वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(A*) $x^2 + y^2 = 2x$ (B) $2x^2 + y^2 = 3x$ (C) $x^2 + 2y^2 = 3x$ (D) $x^2 - y^2 = x - 1$

Sol. Equation of normal at P(x, y) is $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$

$$\text{Distance from origin} = \frac{\left| y + x \frac{dx}{dy} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}}$$

$$\text{Distance of P from x-axis} = |y|$$

$$\text{so } \left(y + x \frac{dx}{dy} \right)^2 = y^2 \left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right)$$

$$\frac{dx}{dy} \left(x^2 \frac{dx}{dy} - y^2 \frac{dx}{dy} + 2xy \right) = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1}{2 \left(\frac{y}{x} \right)} \quad \text{put } \frac{y}{x} = t$$

On solving we get $y^2 + x^2 = kx$

it passes through (1, 1) so the equation of $y^2 + x^2 = 2x$

Hindi. P(x, y) पर अभिलम्ब का समीकरण $Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$

$$\text{मूल बिन्दु से दूरी} = \frac{\left| y + x \frac{dx}{dy} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}}$$

$$\text{P की x-अक्ष से दूरी} = |y|$$

$$\text{अतः } \left(y + x \frac{dx}{dy} \right)^2 = y^2 \left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right)$$

$$\frac{dx}{dy} \left(x^2 \frac{dx}{dy} - y^2 \frac{dx}{dy} + 2xy \right) = 0$$

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1}{2 \left(\frac{y}{x} \right)}, \quad \frac{y}{x} = t = t \quad \text{रखने पर}$$

हल करने पर $y^2 + x^2 = kx$





यह (1, 1) से गुजरता है। अतः समीकरण $y^2 + x^2 = 2x$

10. $f(x)$ is a continuous and differentiable function defined in $\in [0, \infty)$. If $f(0) = 1$ and $f'(x) > 3f(x) \forall x \geq 0$ then

$[0, \infty)$ में परिभाषित $f(x)$ सतत और अवकलनीय फलन है। यदि $f(0) = 1$ और $f'(x) > 3f(x) \forall x \geq 0$ तब

(A) $f(x) \leq e^{3x} \forall x \geq 0$ (B) $f(x) \leq e^{-3x} \forall x \geq 0$ (C) $f(x) > e^{3x} \forall x \geq 0$ (D*) $f(x) \geq e^{3x} \forall x \geq 0$

Sol.

$f'(x) - 3f(x) > 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} (e^{-3x} \cdot f(x)) > 0 \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow e^{-3x} f(x) \geq f(0) \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq e^{3x} \quad \forall x \geq 0$

11. Solution of the equation $x \int_0^x y(t) dt = (x+1) \int_0^x t y(t) dt, x > 0$ is

[16JM120609]

अवकल समीकरण $x \int_0^x y(t) dt = (x+1) \int_0^x t y(t) dt, x > 0$ का हल है—

(A) $y = \frac{c}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$ (B*) $y = \frac{c}{x^3} e^{-1/x}$ (C) $x = \frac{c}{y^3} e^{\frac{1}{y}}$ (D) $x = \frac{c}{y^3} e^{-\frac{1}{y}}$

Sol. Differentiate the equation with respect to x , we get

$\int_0^x y(t) dt = x^2 y(x) + \int_0^x t y(t) dt$

Differentiate again with respect to x , we get

$y(x) = x^2 y'(x) + 2xy(x) + xy(x) \Rightarrow (1 - 3x) y(x) = \frac{x^2 dy(x)}{dx}$

$\int \frac{(1-3x)dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y}$

$\frac{-1}{x} - 2 \ln x = \ln y + c$

$-\frac{1}{x} = \ln (x^3 y c)$

$y = \frac{c}{x^3} e^{-1/x}$

Hindi समीकरण का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\int_0^x y(t) dt = x^2 y(x) + \int_0^x t y(t) dt$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर $y(x) = x^2 y'(x) + 2xy(x) + xy(x) \Rightarrow (1 - 3x) y(x) = \frac{x^2 dy(x)}{dx}$

$\int \frac{(1-3x)dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y}$

$\frac{-1}{x} - 2 \ln x = \ln y + c$

$-\frac{1}{x} = \ln (x^3 y c)$

$y = \frac{c}{x^3} e^{-1/x}$

$y = \frac{c}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$



12. The solution of differential equation $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax$ is

अवकल समीकरण $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + xy = ax$ का हल है—

(A*) $\frac{(y-a)^2 + c^2 x^2}{c^2} = 1$

(B) $\frac{(y+a)^2 + c^2 x^2}{c^2} = 1$

(C) $\frac{(y+a)^2 - c^2 x^2}{c^2} = 1$

(D) $\frac{(y+a)^2 + c^2 x^2}{c^2} = -1$

Sol. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x}{1-x^2}\right)y = \frac{ax}{(1-x^2)}$

$R = e^{\int \frac{x}{1-x^2} dx} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = a \int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx$

$\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c$

$y = a + c \sqrt{1-x^2}$

$(y-a)^2 = c^2 - c^2 x^2 \Rightarrow \frac{(y-a)^2 + c^2 x^2}{c^2} = 1$ (ellipse दीर्घवृत्त)

centre केन्द्र (0, a)

13. Find the curve which passes through the point (2, 0) such that the segment of the tangent between the point of tangency & the y-axis has a constant length equal to 2.

बिन्दु (2, 0) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए ताकि स्पर्शी बिन्दु एवं y-अक्ष के मध्य स्पर्श रेखा के रेखाखण्ड की लम्बाई 2 नियत हो।

(A) $y = \pm \left[\sqrt{4-x^2} - 2 \ln \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} \right]$

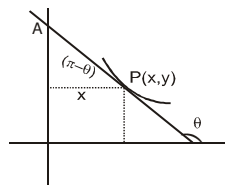
(B*) $y = \pm \left[\sqrt{4-x^2} + 2 \ln \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} \right]$

(C) $y = \pm \left[\sqrt{4-x^2} + 2 \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \right]$

(D) $y = \pm \left[\sqrt{4-x^2} - 2 \ln \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x} \right]$

Sol. $PA = 2$

$x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \sec \theta = 2$



$x = 2$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{4}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}$



$$\int dy = \pm \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$$

solve further as variable separable D.E.

चर पृथक्करण अवकल समीकरण से हल कीजिए।

14. A & B are two separate reservoirs of water. Capacity of reservoir A is double the capacity of reservoir B. Both the reservoirs are filled completely with water, their inlet are closed and then the water is released simultaneously from both the reservoirs. The rate of flow of water out of each reservoir at any instant of time is proportional to the quantity of water in the reservoir at that time. One hour after the water is released, the quantity of water in reservoir A is 1.5 times the quantity of water in reservoir B. After how many hours do both the reservoirs have the same quantity of water?

माना पानी के दो अलग अलग संग्रह स्रोत A एवं B है। स्रोत A की क्षमता, B की क्षमता से दुगुनी है। दोनों संग्रह स्रोत पानी से पूरी तरह भरे हुए हैं। उनके पानी आने के नल बन्द कर दिए हैं तब एक साथ दोनों संग्रह स्रोतों से पानी खोला जाता है। किसी क्षण प्रत्येक संग्रह स्रोत से पानी के बाहर बहने की दर उस समय स्रोत में पानी की मात्रा के समानुपाती है। पानी छोड़ने के एक घण्टे बाद स्रोत A में पानी की मात्रा स्रोत B में पानी की मात्रा का 1.5 गुना है। कितने समय पश्चात् दोनों स्रोतों में पानी बराबर मात्रा में होगा।

- (A) $2\log_{4/3} 2$ (B) $-\log_{2/3} 2$ (C) $\log_3 2$ (D*) $\log_{4/3} 2$

Sol. $\frac{dQ_A}{dt} = -K_1 Q_A, \quad \frac{dQ_B}{dt} = -K_2 Q_B$

$$\int_{Q_A}^{Q'_A} \frac{dQ_A}{Q} = -\int K_1 dt \Rightarrow Q'_A = Q_A \cdot e^{-K_1 t}$$

Similarly इस प्रकार $Q'_B = Q_B \cdot e^{-K_2 t}$

$$\frac{Q'_A}{Q'_B} = \frac{Q_A}{Q_B} e^{-(K_1 - K_2)t} \Rightarrow \frac{3}{2} = e^{-(K_1 - K_2)t} 2 \Rightarrow = 3/4$$

Now let at अब माना $t = t_0$ पर ; $Q'_A = Q'_B$, we get (तब) $t_0 = \log_{3/4} (1/2)$

15. A tank contains 20 kg of salt dissolved in 5000 L of water. Brine that contains .03 kg of salt per litre of water enters the tank at a rate of 25 L/min. The solution is kept thoroughly mixed and drains from the tank at the same rate. How much salt remains in the tank after half an hour ?

- (A) $150 - 130 e^{-50/200}$ (B) $130 - 150 e^{-30/200}$ (C) $130 - 150 e^{-50/200}$ (D*) $150 - 130 e^{-30/200}$

20 किलो ग्राम नमक को एक टंकी में रखे 5000 लीटर पानी में घोला जाता है। .03 किग्रा नमक प्रति लीटर पानी में, 25 लीटर/मिनट की दर से टंकी में मिलाया जाता है। विलयन को मिश्रित करते हुए, एक समान दर से टंकी से निकाला जाता है आधे घंटे के बाद टंकी में कितना नमक शेष रहता है।

- (A) $150 - 130 e^{-50/200}$ (B) $130 - 150 e^{-30/200}$ (C) $130 - 150 e^{-50/200}$ (D*) $150 - 130 e^{-30/200}$

Sol. $y(t)$ be the amount of salt after 't' min and $y(0) = 20$ kg

$$\text{rate in} = \left(\frac{.03 \text{ kg}}{\text{L}} \right) \left(\frac{25 \text{ L}}{\text{min}} \right) = \frac{.75 \text{ kg}}{\text{min}}$$

As $a_{in} = a_{out}$, so the tank always contains 5000 L of liquid so the concentration at time 't' is

$$\left(\frac{y(t)}{5000} \right) \left(\frac{\text{kg}}{\text{L}} \right)$$

$$\text{so rate out} = \left(\frac{y(t) \text{ kg}}{5000 \text{ L}} \right) \left(\frac{25 \text{ L}}{\text{min}} \right) = \frac{y(t) \text{ kg}}{200 \text{ min}} \Rightarrow \frac{d(y(t))}{dt} = .75 - \frac{y(t)}{200}$$

by solving as linear D.E. or variable separable and using initial condition, we get $y(t) = 150 - 130 e^{-t/200}$
the amount of salt after 30 min is $y(30) = 150 - 130 e^{-30/200}$

Hindi. माना $y(t)$, 't' मिनट में नमक की मात्रा है $y(0) = 20$ kg

$$\text{दर} = \left(\frac{.03 \text{ kg}}{\text{L}} \right) \left(\frac{25 \text{ L}}{\text{min}} \right) = \frac{.75 \text{ kg}}{\text{min}}$$





चूँकि $a_{in} = a_{out}$, इसलिए टैंक, सदैव 5000 लीटर रखता है इसलिए 't' समय पर सान्द्रता $\left(\frac{y(t)}{5000}\right)\left(\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)$ है।

$$\text{इसलिए दर} = \left(\frac{y(t)\text{kg}}{5000\text{L}}\right)\left(\frac{25\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)\text{kg}}{200\text{min}}$$

$$\Rightarrow \frac{d(y(t))}{dt} = .75 - \frac{y(t)}{200}$$

रेखिक अवकल समीकरण को हल करने पर या चर पृथक करने पर तथा आरम्भिक स्थिति में $y(t) = 150 - 130 e^{-t/200}$
30 मिनट बाद नमक की मात्र $y(30) = 150 - 130 e^{-30/200}$

PART-II: NUMERICAL VALUE QUESTIONS

भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

INSTRUCTION :

- ❖ The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto two digit.
- ❖ If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.

निर्देश :

- ❖ इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **संख्यात्मक मान** के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।
- ❖ यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के **दो** स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।

1. If differential equations of the curves $c(y + c)^2 = x^3$, where 'c' is any arbitrary constant is $12y(y')^2 + ax = bx(y')^3$ then $\frac{a}{b}$ is equal to **[16JM120610]**

यदि वक्र $c(y + c)^2 = x^3$ से बनने वाली अवकल समीकरण $12y(y')^2 + ax = bx(y')^3$ है, तो $\frac{a}{b}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ c स्वेच्छ अचर है।

Ans. 03.37

Sol. $c(y + c)^2 = x^3$ (i)
diffⁿ, w.r.t x
 $2c(y + c) y' = 3x^2$ (ii)
divide equation (i) by square of equation (ii)

$$\frac{c(y + c)^2}{4c^2(y + c)^2 (y')^2} = \frac{x^3}{9x^4}$$

$$c = \frac{9x}{4(y')^2}$$

by putting c in equation (ii) we get

$$12y(y')^2 + 27x = 8x(y')^3$$

Hindi $c(y + c)^2 = x^3$ (i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2c(y + c) y' = 3x^2$$
 (ii)

समीकरण (i) को समीकरण (ii) के वर्ग से विभाजित करने पर



$$\frac{c(y+c)^2}{4c^2(y+c)^2(y')^2} = \frac{x^3}{9x^4}$$

$$c = \frac{9x}{4(y')^2}$$

अब c का मान (ii) में रखने पर

$$12y(y')^2 + 27x = 8x(y')^3$$

2. The order of the differential equation of the family of ellipse having fixed centre and given eccentricity, is :

दी गई उत्केन्द्रता और स्थिर केन्द्र के दीर्घवृत्त के निकाय की अवकल समीकरण का क्रम है -

Ans. 02.00

Sol. Let माना $\frac{((y-\beta)-m(x-\alpha))^2}{a^2} + \frac{(m(x-\alpha)+(y-\beta))^2}{b^2} = 1$ (1)

be the equation of the ellipse having (α, β) as its centre, where

दीर्घवृत्त का समीकरण है जिसका केन्द्र (α, β) है। जहाँ

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \text{ from both the equations we get two independent parameters(2)}$$

$\Rightarrow$ order of differential equation is 2.

समीकरण से $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ दो स्वतंत्र प्राचल प्राप्त होते हैं। अवकल समीकरण का क्रम 2 है।

3. If $y(x)$ satisfies the equation $y'(x) = y(x) + \int_0^1 y \, dx$ & $y(0) = 1$ then value of $y \left(\ln \left(\frac{10-e}{7} \right) \right)$

यदि $y(x)$ समीकरण $\frac{dy}{dx} = y + \int_0^1 y \, dx$ को संतुष्ट करता है और $y(0) = 1$ तो $y \left(\ln \left(\frac{10-e}{7} \right) \right)$ का मान ज्ञात कीजिये।

Ans. 01.28

Sol. $\frac{dy}{dx} = y + \int_0^1 y \, dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y + a \quad \text{let} \quad \int_0^1 y \, dx = a \quad \text{माना} \quad \int_0^1 y \, dx = a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y - a = 0$$

$$\text{I.F.} = e^{-\int 1 \cdot dx} = e^{-x}$$

$$\text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{-\int 1 \cdot dx} = e^{-x}$$

$$\text{Now अब } e^{-x} \frac{dy}{dx} - ye^{-x} - ae^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow ye^{-x} + ae^{-x} + c = 0$$

$$\Rightarrow y + a + ce^x = 0$$

$$a = \int_0^1 y \, dx = -\int_0^1 (a + ce^x) \, dx = -a(1-0) - c(e^x) \Big|_0^1 = -a - c(e-1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{(1-e)c}{2}$$

$$y + \left(\frac{(1-e) + 2e^x}{2} \right) c = 0$$



$$y = 1; x = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{e-3}$$

$$y(x) = \left(\frac{2e^x - e + 1}{3 - e} \right)$$

$$y \left(\ln \left(\frac{10 - e}{7} \right) \right) = \frac{9}{7}$$

4. Let c_1 and c_2 be two integral curves of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. A line passing through origin meets c_1 at $P(x_1, y_1)$ and c_2 at $Q(x_2, y_2)$. If $c_1 : y = f(x)$ and $c_2 : y = g(x)$ then find the value of $\frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$

माना अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ के दो समाकल वक्र c_1 तथा c_2 हैं। मूल बिन्दु से गुजरने वाली एक रेखा c_1 को

$P(x_1, y_1)$ पर एवं c_2 को $Q(x_2, y_2)$ पर मिलती है। यदि $c_1 : y = f(x)$ एवं $c_2 : y = g(x)$ हो, तो $\frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$ का मान है—

Ans. 01.00

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ let the line from origin be $y = mx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \text{ which is constant and independent of } x, y$$

$$\text{Hence } f'(x_1) = g'(x_1)$$

Hindi. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा $y = mx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \text{ जो कि अचर है और } x, y \text{ से स्वतन्त्र है।}$$

$$\text{अतः } f'(x_1) = g'(x_1)$$

5. If solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ is $x = ce^{\sin y} - k(1 + \sin y)$, then $k =$

यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$ का हल $x = ce^{\sin y} - k(1 + \sin y)$ है, तो $k =$

Ans. 02.00

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + 2 \sin y \cos y}$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = x \cos y + 2 \sin y \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} + (-\cos y) x = 2 \sin y \cos y$$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{-\int \cos y dy} = e^{-\sin y}$$

$\therefore$ The solution is $\therefore$ हल निम्न है —

$$x \cdot e^{-\sin y} = 2 \int e^{-\sin y} \cdot \sin y \cos y dy = -2 \sin y e^{-\sin y} - 2 \int (-e^{-\sin y}) \cos y dy$$

$$= -2 \sin y e^{-\sin y} + 2 \int e^{-\sin y} \cos y dy = -2 \sin y e^{-\sin y} - 2 e^{-\sin y} + c$$





$$\begin{aligned} \text{i.e. } x &= -2 \sin y - 2 + c e^{\sin y} = c e^{\sin y} - 2(1 + \sin y) \\ \therefore k &= 2 \end{aligned}$$

6. If $y(x)$ satisfies the differential equation ; $\cos^2 x (dy/dx) - (\tan 2x) y = \cos^4 x$, $|x| < \frac{\pi}{4}$, and $y(0) = 0$ then

$y\left(\frac{\pi}{6}\right)$ is equal to **[16JM120613]**

यदि $y(x)$ अवकल समीकरण ; $\cos^2 x (dy/dx) - (\tan 2x) y = \cos^4 x$, $|x| < \frac{\pi}{4}$, और $y(0) = 0$ को संतुष्ट करता है तो

$y\left(\frac{\pi}{6}\right)$ का मान है—





Ans. 00.64 00.65

Sol. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} - (\tan 2x) y = \cos^4 x$

$$R = e^{\int -\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \sec^2 x dx} = (1 - \tan^2 x)$$

After solving differential equation $2y (1 - \tan^2 x) = \sin(2x) + c$

अवकल समीकरण $2y (1 - \tan^2 x) = \sin(2x) + c$ को हल करने पर

put $x = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \tan 2x \cdot \cos^2 x \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

7. ✎ Let y_1 and y_2 are two different solutions of the equation $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.
Such that the linear combination $\alpha y_1 + \beta y_2$ is also solution of given differential equation.
Then value of $\alpha + \beta$ is

माना y_1 तथा y_2 समीकरण $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ के दो भिन्न-भिन्न हल हैं, तब
यदि $\alpha y_1 + \beta y_2$ दी गई समीकरण का एक हल हो, तो $\alpha + \beta$ का मान है—

Ans. 01.00

Sol. $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

y_1 & y_2 are two solution of above equation so

$$y_1' + P(x) y_1 = Q(x) \quad \dots(1)$$

$$y_2' + P(x) y_2 = Q(x) \quad \dots(2)$$

multiply equation (1) by α and equation (2) by β then add

$$(\alpha y_1' + \beta y_2') + P(x) (\alpha y_1 + \beta y_2) = Q(x) (\alpha + \beta)$$

let $y = \alpha y_1 + \beta y_2$

$$y' + P(x)y = Q(x) (\alpha + \beta)$$

for y to be solution of diff. equation

$$\alpha + \beta = 1$$

Hindi. $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

उपरोक्त समीकरण के दो हल y_1 एवं y_2 हैं अतः

$$y_1' + P(x) y_1 = Q(x) \quad \dots(1)$$

$$y_2' + P(x) y_2 = Q(x) \quad \dots(2)$$

(1) को α से एवं समीकरण (2) को β से गुणा करके जोड़ने पर

$$(\alpha y_1' + \beta y_2') + P(x) (\alpha y_1 + \beta y_2) = Q(x) (\alpha + \beta)$$

माना $y = \alpha y_1 + \beta y_2$

$$y' + P(x)y = Q(x) (\alpha + \beta)$$

अवकल समीकरण का हल y होने के लिए $\alpha + \beta = 1$





8. Let the curve $y = f(x)$ passes through $(4, -2)$ satisfy the differential equation, [16JM120612]

$$y(x + y^3) dx = x(y^3 - x) dy \text{ \& let } y = g(x) = \int_{1/8}^{\sin^2 x} \sin^{-1} \sqrt{t} dt + \int_{1/8}^{\cos^2 x} \cos^{-1} \sqrt{t} dt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ If the area of the}$$

region bounded by curves $y = f(x)$, $y = g(x)$ and $x = 0$ is $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4$ where $a \in \mathbb{N}$ then a is equal to

माना वक्र $y = f(x)$ बिन्दु $(4, -2)$ से गुजरता है जो अवकल समीकरण $y(x + y^3) dx = x(y^3 - x) dy$ तथा माना

$$y = g(x) = \int_{1/8}^{\sin^2 x} \sin^{-1} \sqrt{t} dt + \int_{1/8}^{\cos^2 x} \cos^{-1} \sqrt{t} dt, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ को संतुष्ट करता है। यदि } y = f(x), y = g(x) \text{ एवं } x = 0 \text{ से}$$

परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{a} \right)^4$ है जहाँ $a \in \mathbb{N}$ तब a बराबर है—

Ans. 05.33

Sol. $y(x + y^3) dx = x(y^3 - x) dy$

$$\Rightarrow -\frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{d(xy)}{(xy)^2} = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 2x + 2cx^2y = 0$$

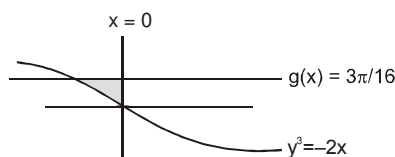
It passes through $(4, -2)$

$$-8 + 8 + 2c(16)(-2) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore y^3 = -2x$$

$$g'(x) = 2\sin x \cos x \sin^{-1} \sin x + 2\cos x (-\sin x) \cos^{-1}(\cos x) = 0$$

so $g(x)$ is constant



$$g(\pi/4) = g(x) = \int_{1/8}^{1/2} (\sin^{-1} \sqrt{t} + \cos^{-1} \sqrt{t}) dt$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

$$A = \left| -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{16}} y^3 dy \right|$$

$$A = \frac{1}{2 \times 4} \left(\frac{3\pi}{16} \right)^4$$

Hindi $y(x + y^3) dx = x(y^3 - x) dy$

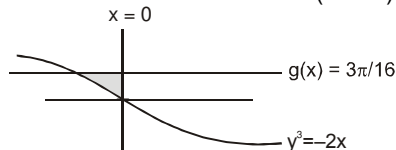
$$\Rightarrow -\frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{d(xy)}{(xy)^2} = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + 2x + 2cx^2y = 0$$

यह $(4, -2)$ से गुजरता है।

$$-8 + 8 + 2c(16)(-2) = 0 \Rightarrow y^3 = -2x$$

$$g'(x) = 2\sin x \cos x \sin^{-1} \sin x + 2\cos x (-\sin x) \cos^{-1}(\cos x) = 0$$





$$g(\pi/4) = g(x) = \int_{1/8}^{1/2} (\sin^{-1} \sqrt{t} + \cos^{-1} \sqrt{t}) dt$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

$$A = \left| -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{16}} y^3 dy \right|$$

$$A = \frac{1}{2 \times 4} \left(\frac{3\pi}{16} \right)^4$$

अतः n वर्ष के न्यूनतम पूर्णांक मान जब देश आत्मनिर्भर हो जाएगा $\frac{\ln 10 - \ln 9}{\ln(1.04) - 0.03}$ के बराबर या से अधिक है।

9. If the equation of curve passing through (3, 4) and satisfying the differential equation

$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x - y) \frac{dy}{dx} - x = 0 \text{ is } Ax + By + 2 = 0 \text{ then value of } A^3 - B^3 \text{ is}$$

(3, 4) से गुजरने वाले तथा अवकल समीकरण $y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x - y) \frac{dy}{dx} - x = 0$ को संतुष्ट करने वाले वक्र का समीकरण

$Ax + By + 2 = 0$ है तो $A^3 - B^3$ का मान है—

Ans. 16.00

Sol. $y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y \frac{dy}{dx} - x = 0$

$$y \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) + x \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = 0$$

$$\left(y \frac{dy}{dx} + x \right) \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = 0$$

$\therefore$ either $ydy + xdx = 0$ or $dy - dx = 0$
since the curves pass through the point (3, 4)

$$\therefore x^2 + y^2 = 25 \quad \text{or} \quad x - y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow A = 2 \text{ \& } B = 2$$

$$\Rightarrow A - B = 4$$

Hindi. $y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y \frac{dy}{dx} - x = 0$

$$y \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) + x \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = 0$$

$$\left(y \frac{dy}{dx} + x \right) \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = 0$$

$\therefore$ या तो $ydy + xdx = 0$ या $dy - dx = 0$

चूँकि वक्र बिन्दु (3, 4) से गुजरता है।

$$\text{अतः } x^2 + y^2 = 25 \quad \text{या} \quad x - y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 2 = 0 \quad \Rightarrow A = 2 \text{ \& } B = 2$$

$$\Rightarrow A - B = 4$$

$$\Rightarrow \frac{64y \left(\frac{\pi}{6} \right)}{3\sqrt{3}} = 8$$





10. The perpendicular from the origin to the tangent at any point on a curve is equal to the abscissa of the point of contact. If equation of tangent to the curve at (1, 3) is $ax + by + 5 = 0$ then value of $a^2 + b^2$ is equal to **[16JM120611]**

वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी, स्पर्श बिन्दु के भुज के बराबर है। वक्र की (1, 3) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $ax + by + 5 = 0$ है तो $a^2 + b^2$ का मान है—

Ans. 25.00

Sol. Equ. of tangent

$$Y - y = m(X - x)$$

$$\left| \frac{y - mx}{\sqrt{1 + m^2}} \right| = x \Rightarrow (y - mx)^2 = x^2(1 + m^2)$$

$$\Rightarrow y^2 - 2mxy = x^2 \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Homogeneous

equation

$$\text{which gives } x^2 + y^2 - cx = 0$$

$$x^2 + y^2 = cx$$

curve passes through (1, 3)

$$\Rightarrow c = 10$$

$$\text{equation of curve is } x^2 + y^2 - 10x = 0$$

$$\text{equation of tangent at (1, 3) is } x.1 + 3y - 5(x + 1) = 0$$

$$4x - 3y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$$

Hindi. स्पर्श रेखा का समीकरण

$$Y - y = m(X - x)$$

$$\left| \frac{y - mx}{\sqrt{1 + m^2}} \right| = x \Rightarrow (y - mx)^2 = x^2(1 + m^2)$$

$$\Rightarrow y^2 - 2mxy = x^2 \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

यह समघात समीकरण है जिसका हल $x^2 + y^2 - 2x = 0$ है।

$$x^2 + y^2 = cx$$

यह (1, 3) से गुजरता है।

$$\Rightarrow c = 10$$

$$\text{वक्र का समीकरण } x^2 + y^2 - 10x = 0 \text{ है।}$$

$$(1, 3) \text{ पर स्पर्श रेखा का समीकरण } x.1 + 3y - 5(x + 1) = 0 \text{ है।}$$

$$4x - 3y + 5 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$$

11. A curve passing through point (1, 2) possessing the following property; the segment of the tangent between the point of tangency & the x-axis is bisected at the point of intersection with the y-axis. If A is area bounded by the curve & line $x = 1$ then A^2 is equal to **[16JM120614]**

(1, 2) से गुजरने वाला वक्र, निम्नलिखित गुणधर्म को रखता है, स्पर्श बिन्दु एवं x-अक्ष के मध्य स्पर्श रेखा का अन्तःखण्ड, y-अक्ष द्वारा समद्विभाजित होता है। यदि वक्र और रेखा $x = 1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल A हो तो A^2 का मान बराबर है—

Ans. 07.11

Sol. $y - x = m(X - x)$

$$X_{\text{int}} = x - \frac{y}{m}$$





$$x - \frac{y}{m} + x = 0$$

$$2x = \frac{y}{m}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

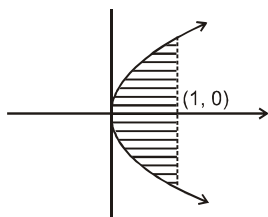
$$\ln y = \frac{1}{2} \ln x + c \Rightarrow \frac{y^2}{x} = k \Rightarrow y^2 = kx$$

curve passes through (1, 2)

वक्र (1, 2) से गुजरता है।

$$\Rightarrow k = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 4x$$



$$A = 2 \int_0^1 2\sqrt{x} dx$$

$$A = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad 9A^2 = 64$$

12. Two cylindrical tanks in which initially one is filled with water to the height of 1 m and other is empty, are connected by a pipe at the bottom. Water is allowed to flow from filled tank to the empty tank through the pipe. The rate of flow of water through the pipe at any time is $a\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$, where ' h_1 ' and ' h_2 ' are the heights of water level (above pipe) in the tanks at that time and ' g ' is acceleration due to gravity. If the cross sectional area of the filled and empty tanks be A and $A/2$ and that of the pipe be ' a ', and if

$\frac{kA}{a\sqrt{2g}}$ is the time when the level of water in both tanks will be same (neglect the volume of the water in pipe), then k is :

दो बेलनाकार टंकी जिसमें आरम्भ में एक टंकी में 1 मीटर ऊंचाई तक पानी भरा है तथा दूसरी खाली है, पैदों को पाइप से जोड़ा जाता है। पानी, भरी हुई टंकी से खाली टंकी में बहने लगता है। किसी समय पर पाइप से पानी बहने की दर $a\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ है। जहाँ ' h_1 ' और ' h_2 ' टंकियों में पानी की उचाईयों हैं। तथा ' g ' गुरुत्वीय त्वरण है। यदि भरी हुई टंकी का पृष्ठ क्षेत्रफल A तथा $A/2$ है जबकि पाइप का पृष्ठ क्षेत्र ' a ', यदि दोनों टंकी में पानी की सतह का समान स्तर होने में

लगा समय $\frac{kA}{a\sqrt{2g}}$ है (पाइप में पानी के आयतन को नगण्य मानने पर) तब k का मान है -

Ans. 00.67

Sol. Let at any time ' t ' the height of water above the pipe in the tanks be h_1 and h_2 . Then, volume in tank (1) + volume in tank (2) = total volume.

माना किसी समय ' t ' पर पानी की ऊंचाई h_1 और h_2

तब पानी की टंकी में आयतन (1) + टंकी (2) का आयतन = कुल आयतन

$$Ah_1 + \frac{A}{2}h_2 = A \cdot 1$$

$$2h_1 + h_2 = 2$$

$$\Rightarrow h_1 - h_2 = h_1 - (2h_1) = 3h_1 - 2 \quad \dots(1)$$

Let us calculate the volume of water passed through the pipe in time ' dt ', which is





माना कि पानी का आयतन किसी समय 't' पर पाइप से गुजराता है जो कि

$$dV = a\sqrt{2g(3h_1 - 2)}dt \quad \dots(2)$$

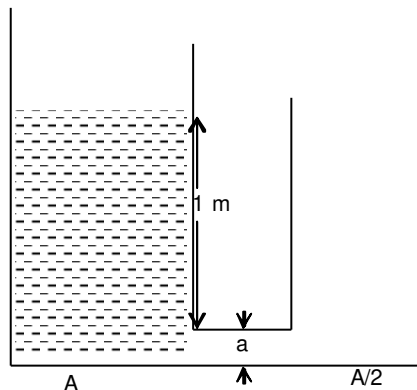
The volume of water passed through the pipe in time 'dt' will cause the downing of level of tank (1) by so it is = Adh_1 $\dots(3)$

किसी समय 'dt' पर पाइप से गुजरने वाले पानी का आयतन से टैंक की सतह में dh_1 की कमी होती है

$$\text{इसलिए} = Adh_1 \quad \dots(3)$$

From (2) and (3), we get (2) और (3), से

$$Adh_1 = a\sqrt{2g(3h_1 - 2)}dt$$



$$\Rightarrow -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_1^h \frac{dh_1}{\sqrt{3h_1 - 2}} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{2A}{3a\sqrt{2g}} [\sqrt{3h - 2} - 1] = t$$

Here 'h' is the height of water in both the tanks when it is equal, therefore

दोनों टंकी में यहाँ 'h' पानी की ऊँचाई है जो बराबर है इसलिए

$$Ah + \frac{A}{2}h = A \cdot 1 \Rightarrow \frac{3h}{2} = 1 \Rightarrow h = \frac{2}{3}$$

$$\text{Putting in above equation we get } t = \frac{2A}{3a\sqrt{2g}} = \frac{1}{3} \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2}{g}}$$

$$\text{उपरोक्त समीकरण में रखने पर } t = \frac{2A}{3a\sqrt{2g}} = \frac{1}{3} \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2}{g}}$$

13. If $f(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$. Let for each positive integer n , P_n be the polynomial such that $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ for

all $x > 0$ and if $P_{n+1}(x) = x^2 \left[\alpha P_n(x) - \beta \frac{d}{dx} P_n(x) \right]$, then $\alpha + \beta$ is :

यदि $f(x) = e^{-1/x}$, $x > 0$ माना प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिए P_n बहुपद इस प्रकार है कि $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$ सभी x

> 0 के लिए $P_{n+1}(x) = x^2 \left[\alpha P_n(x) - \beta \frac{d}{dx} P_n(x) \right]$, तब $\alpha + \beta$ है।

Ans. 02.00

Sol. From the given condition of the problem $\frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$

$$\text{दिए गए प्रतिबन्ध से } \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}$$



$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left(P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x} \right) = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x} \\
 &\Rightarrow e^{-1/x} \frac{dP_n \left(\frac{1}{x} \right)}{dx} + P_n \left(\frac{1}{x} \right) \frac{de^{-1/x}}{dx} = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x} \\
 &\Rightarrow e^{-1/x} \frac{dP_n \left(\frac{1}{x} \right)}{d \left(\frac{1}{x} \right)} \times \frac{d \left(\frac{1}{x} \right)}{dx} + P_n \left(\frac{1}{x} \right) \frac{de^{-1/x}}{d \left(\frac{1}{x} \right)} \times \frac{d \left(\frac{1}{x} \right)}{dx} = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x} \\
 &\Rightarrow -\frac{1}{x^2} \frac{dP_n \left(\frac{1}{x} \right)}{d \left(\frac{1}{x} \right)} + \frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x} \right) = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) \quad \text{Put } \frac{1}{x} = y \\
 &\Rightarrow P_{n+1}(y) = y^2 \left[P_n(y) - \frac{dP_n(y)}{dy} \right] \\
 &\Rightarrow P_{n+1}(x) = x^2 \cdot \left[P_n(x) - \frac{dP_n(x)}{dx} \right]
 \end{aligned}$$

14. If $y = f(x)$ be a curve passing through (e, e^e) and which satisfy the differential equation $(2ny + xy \log x)dx - x \log x dy = 0$, value of $\int_{1/e}^e g(x) dx$ where $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$, is :

यदि वक्र $y = f(x)$ बिन्दु (e, e^e) से गुजरता है तथा अवकल समीकरण $(2ny + xy \log x)dx - x \log x dy = 0$ को संतुष्ट करता है तब $\int_{1/e}^e g(x) dx$ का मान होगा जहाँ $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$, है।

Ans. 00.00

Sol. $(2ny + xy \log x)dx = x \log x dy \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{2n}{x \log x} + 1 \right) dx$

$\Rightarrow \log(y) = 2n \log |\log x| + x + c$ (Since the curve passes through (e, e^e) we get $c = 0$)

$\Rightarrow \log(y) = 2n \log |\log x| + x + c$ (चूँकि वक्र (e, e^e) से गुजरता है जब $c = 0$)

$$\Rightarrow y = e^{x + \log(\log x)^{2n}} \Rightarrow y = e^x \cdot e^{\log(\log x)^{2n}}$$

$$\Rightarrow y = e^x (\log x)^{2n} \Rightarrow f(x) = e^x (\log x)^{2n}$$

$$\Rightarrow g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} h \rightarrow \infty, & x \leq 1/e & \because (\log x)^{2n} \rightarrow \text{infinity} \\ 0, & 1/e < x < e & (\log x)^{2n} \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty, & x \geq e & (\log x)^{2n} \rightarrow \text{infinity} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{1/e}^e g(x) dx = 0.$$

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. The differential equation of all circles in a plane must be $\left(y_1 = \frac{dy}{dx}, y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \text{etc.} \right)$ [16JM120618]

$$(A^*) y_3(1 + y_1^2) - 3y_1y_2^2 = 0$$

(B*) of order 3 and degree 1

(C) of order 3 and degree 2

$$(D) y_3^2(1 - y_1^2) - 3y_1y_2^2 = 0$$

समतल में सभी वृत्तों की अवकल समीकरण $\left(y_1 = \frac{dy}{dx}, y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \text{etc.} \right)$



Resonance
Educating for better tomorrow

Corporate Office: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005
Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in
Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 19



$$(A^*) y_3(1+y_1^2) - 3y_1y_2^2 = 0$$

(B*) क्रम 3 एवं घात 1

(C) क्रम 3 एवं घात 2

$$(D) y_3^2(1-y_1^2) - 3y_1y_2^2 = 0$$

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (There are three arbitrary constants g, f and c)
(यहाँ पर f, g एवं c स्वेच्छ नियतांक है)

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 2g + 2f \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots (1)$$

$$2 + 2y_1^2 + 2yy_2 + 2fy_2 = 0 \quad \dots (2)$$

$$4y_1y_2 + 2y_1y_2 + 2yy_3 + 2fy_3 = 0 \quad \dots (3)$$

from (1), (2) and (3) (1), (2) एवं (3) से

$$y_3(1+y_1^2) - 3y_1y_2^2 = 0$$

2. Correct statement is/are

[16JM120620]

(A*) The differential equation of all conics whose axes coincide with the axes of co-ordinates is of order 2.

(B*) The differential equation of all straight lines which are at a fixed distance p from origin is of degree 2.

(C*) The differential equation of all parabola each of which has a latus rectum 4a & whose axes are parallel to y-axis is of order 2.

(D) The differential equation of all parabolas of given vertex, is of order 3.

सही कथन है—

(A*) सभी शांकव की अवकल समीकरण होगी जिसकी अक्ष, निर्देशांक अक्षों के साथ संपाती है, की कोटि 2 है।

(B*) सभी सरल रेखाओं की अवकल समीकरण, जो मूल बिन्दु से स्थिर दूरी p पर है, की घात 2 है।

(C*) सभी परवलयों की अवकल समीकरण जिनमें प्रत्येक में नाभिलम्ब की लम्बाई 4a है और जिसकी अक्ष, y-अक्ष के समान्तर है, की कोटि 2 है।

(D) दिए गए शीर्ष के सभी परवलयों की अवकल समीकरण की कोटि 3 है।

Sol. (A) $P(x, y) = ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 2ax + 2hy + 2g = 0 \quad ax + hy + g = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = 0 \Rightarrow 2by + 2hx + 2f = 0 \quad by + hx + f = 0$$

$$\Rightarrow h = g = f = 0$$

$$\text{conic : } ax^2 + by^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)y^2 + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{order} = 2$$

$$\text{शांकव : } ax^2 + by^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)y^2 + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{कोटि} = 2$$

$$(B) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad \dots (1)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha y' = 0$$

$$y' = -\cot \alpha \quad \dots (2)$$

solving (1) & (2) we get we get 2 degree equation

(1) और (2) को हल करने पर 2 घात समीकरण है।

(C) equation of parabola will be $(x - h)^2 = \pm 4a(y - k)$
where h, & k are parameter

$\Rightarrow$ order will be 2

परवलय $(x - h)^2 = \pm 4a(y - k)$ का समीकरण होगा।

जहाँ h, और k प्राचल है।

$\Rightarrow$ कोटि 2 होगी

(D) let vertex of parabola be (h, k)



equation of axis & tangent at vertex will be

$$y - k = m(x - h) \text{ \& } y - k = -(x - h)$$

let length of L.R be $4a$ then equation of parabola is given by

$$\left(\frac{(y - k) - m(x - h)}{\sqrt{1 + m^2}} \right)^2 = 4a \left(\frac{m(y - k) + (x - h)}{\sqrt{1 + m^2}} \right)$$

where m & a are parameter

$\Rightarrow$ order will be 2

माना परवलय का शीर्ष (h, k) है

अक्ष का समीकरण और शीर्ष पर स्पर्श रेखा होगी।

$$y - k = m(x - h) \text{ और } y - k = -\frac{1}{m}(x - h)$$

माना नाभिलम्ब की लम्बाई $4a$ है तब परवलय का समीकरण दिया गया है—

$$\left(\frac{(y - k) - m(x - h)}{\sqrt{1 + m^2}} \right)^2 = 4a \left(\frac{m(y - k) + (x - h)}{\sqrt{1 + m^2}} \right)$$

जहाँ m और a प्राचल है।

$\Rightarrow$ कोटि 2 होगी

3. Solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ is [16JM120615]

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ का हल है —

(A*) $\tan^{-1} y + \sin^{-1} x = c$

(B) $\tan^{-1} x + \sin^{-1} y = c$

(C) $\tan^{-1} y \cdot \sin^{-1} x = c$

(D*) $\cot^{-1} \frac{1}{y} + \cos^{-1} \sqrt{1-x^2} = c$

Sol. $\frac{dy}{1+y^2} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y + \sin^{-1} x + c = 0$$

$$\Rightarrow \cot^{-1} \frac{1}{y} + \cos^{-1} \sqrt{1-x^2} + c = 0$$

4. The solution of $(x + y + 1) dy = dx$ are

$(x + y + 1) dy = dx$ का हल है —

(A*) $x + y + 2 = Ce^y$

(B) $x + y + 4 = C \log y$

(C) $\log(x + y + 2) = Cy$

(D*) $\log(x + y + 2) = C + y$

Sol. $\frac{dx}{dy} = x + y + 1$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - x - y - 1 = 0$$

$$\text{I.F.} = e^{-\int dy} = e^{-y}$$

$$\text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{-\int dy} = e^{-y}$$

$$\Rightarrow e^{-y} \frac{dx}{dy} - xe^{-y} - ye^{-y} - e^{-y} = 0 \Rightarrow \int d(xe^{-y}) = \int (e^{-y} + ye^{-y}) dy \Rightarrow xe^{-y} = -e^{-y} - ye^{-y} + \int e^{-y} dy$$

$$\Rightarrow xe^{-y} = -e^{-y} - ye^{-y} - e^{-y} + c \Rightarrow x = -1 - y - 1 + ce^y \Rightarrow x + y + 2 = ce^y$$



5. The solution of $\frac{dx}{dy} + y = ye^{(n-1)x}$, ($n \neq 1$)

$$\frac{dx}{dy} + y = ye^{(n-1)x} \text{ का हल है, } (n \neq 1)$$

$$(A^*) \frac{1}{n-1} \ln \left(\frac{e^{(n-1)x} - 1}{e^{(n-1)x}} \right) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$(B^*) e^{(1-n)x} = 1 + ce^{(n-1)\frac{y^2}{2}}$$

$$(C) \ln(1 + ce^{(n-1)\frac{y^2}{2}}) + nx + 1 = 0$$

$$(D) e^{(n-1)x} = ce^{(n-1)\frac{(n-1)y^2}{2}} + 1$$

Sol. $\frac{dx}{dy} = y[e^{(n-1)x} - 1]$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{e^{(n-1)x} - 1} = \int y dy \Rightarrow \int \frac{dx}{e^{(n-1)x} - 1} = \frac{y^2}{2} + C$$

Let माना $e^{(n-1)x} = t \Rightarrow (n-1)e^{(n-1)x} dx = dt$

$$\Rightarrow \frac{n}{n-1} \int \frac{dt}{t(t-1)} = \frac{y^2}{2} + C \Rightarrow \frac{1}{n-1} \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right] dt = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1} \ln \left(\frac{t-1}{t} \right) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1} \ln \left(\frac{e^{(n-1)x} - 1}{e^{(n-1)x}} \right) = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{e^{(n-1)x} - 1}{e^{(n-1)x}} = A e^{(n-1)\frac{y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{e^{(n-1)x}} = A e^{(n-1)\frac{y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow e^{(1-n)x} = 1 - A e^{(n-1)\frac{y^2}{2}}$$

$$e^{(1-n)x} = 1 + c e^{(n-1)\frac{y^2}{2}}$$

6. Correct statement is/are

$$(A^*) f(x, y) = x^2 e^{\frac{x}{y}} + \frac{y^3}{x} + y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right) \text{ is a homogenous function of degree two.}$$

$$(B) f(x, y) = \frac{\sin y + x}{\sin 2y + x \cos y} \text{ is homogenous function of degree one.}$$

$$(C^*) x \sin \left(\frac{y}{x} \right) dy + \left(y \sin \frac{y}{x} - x \right) dx = 0 \text{ is a homogenous differential equation.}$$

$$(D^*) f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \tan \frac{y}{x} \text{ is homogenous function of degree zero.}$$

सही कथन है—

$$(A^*) f(x, y) = x^2 e^{\frac{x}{y}} + \frac{y^3}{x} + y^2 \ln \left(\frac{y}{x} \right), \text{ दो घात का समघात फलन है।}$$

$$(B) f(x, y) = \frac{\sin y + x}{\sin 2y + x \cos y} \text{ एक घात का समघात फलन है।}$$





(C*) $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy + \left(y \sin\frac{y}{x} - x\right) dx = 0$ एक समघात अवकल समीकरण है।

(D*) $f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \tan\frac{y}{x}$ शून्य घात का समघात फलन है।

- Ans.** (A) $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$
 $\Rightarrow f(x, y)$ is homogenous of degree 2.
- (B) $f(\lambda x, \lambda y)$ can not be written as $\lambda^n f(x, y)$
 $\Rightarrow$ function is not homogenous.
- (C) $x \sin \frac{y}{x}$ & $y \sin \frac{y}{x} - x$ are homogenous function of degree 1.
 therefore differential equation is homogenous.
- (D) $f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$
 $\Rightarrow$ degree 0.
- Hindi.** (A) $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$
 $\Rightarrow$ 2 घात का $f(x, y)$ समघात है।
- (B) $f(\lambda x, \lambda y)$ को लिखा नहीं जा सकता है $\lambda^n f(x, y)$
 $\Rightarrow$ फलन, समघात नहीं है।
- (C) $x \sin \frac{y}{x}$ & $y \sin \frac{y}{x} - x$, 1 घात का समघात फलन है।
 इसलिए अवकल समीकरण, समघात है।
- (D) $f(x, y) = \lambda^0 f(x, y)$
 $\Rightarrow$ घात शून्य है।

7. Solution of differential equation $f(x) \frac{dy}{dx} = f^2(x) + f(x)y + f'(x)y$ is [16JM120616]

अवकल समीकरण $f(x) \frac{dy}{dx} = f^2(x) + f(x)y + f'(x)y$ का हल है -

- (A) $y = f(x) + ce^x$ (B) $y = -f(x) + ce^x$ (C*) $y = -f(x) + ce^x f(x)$ (D) $y = cf(x) + e^x$

Sol. Given DE can be written as $\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{f'(x)}{f(x)}\right)y = f(x)$

Which is L.D.E.

$$\text{I.F.} = e^{-\int \left(1 + \frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx} = \frac{e^{-x}}{f(x)}$$

$$\text{General solution } y \frac{e^{-x}}{f(x)} = \int f(x) \frac{e^{-x}}{f(x)} dx + c = -e^{-x} + c$$

$$\Rightarrow y = -f(x) + ce^x f(x)$$

Hindi. दी गयी अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं $-\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{f'(x)}{f(x)}\right)y = f(x)$

जो कि रेखीय अवकल समीकरण है।

$$\text{समाकल गुणांक} = e^{-\int \left(1 + \frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx} = \frac{e^{-x}}{f(x)}$$

$$\text{व्यापक हल } y \frac{e^{-x}}{f(x)} = \int f(x) \frac{e^{-x}}{f(x)} dx + c = -e^{-x} + c$$



$$\Rightarrow y = -f(x) + ce^x f(x)$$

8. The solution of $x^2 y_1^2 + xy y_1 - 6y^2 = 0$ are (here $y_1 = dy/dx$)

$$x^2 y_1^2 + xy y_1 - 6y^2 = 0 \text{ का हल है -}$$

$$(यहाँ $y_1 = dy/dx$)$$

$$(A^*) y = Cx^2$$

$$(B) x^2 y = C$$

$$(C^*) \frac{1}{2} \ln y = C + \log x \quad (D^*) x^3 y = C$$

Sol. $x^2 y_1^2 + xy y_1 - 6y^2 = 0$

It is quadratic equation in y_1

यह y_1 में द्विघात समीकरण है।

$$y_1 = \frac{-xy \pm \sqrt{x^2 y^2 + 24y^2 x^2}}{2x^2} = \frac{-xy \pm 5xy}{2x^2}$$

$$y_1 = -\frac{3y}{x}$$

$$y_1 = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$-\frac{dy}{y} = 3 \frac{dx}{x}$$

$$-\ln y = 3 \ln x + \ln c$$

$$\ln y = 2 \ln x + \ln c$$

$$x^3 y = C$$

$$y = cx^2$$

Option विकल्प (C)

$$\frac{1}{2} \log y = c + \log x$$

$$\log y = \ln c_1 + \log x^2$$

$$y = C_1 x^2$$

9. The solution of differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} (e^x + e^{-x}) + 1 = 0$ is

$$\text{अवकल समीकरण } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} (e^x + e^{-x}) + 1 = 0 \text{ का हल है-}$$

$$(A^*) y = e^x + c$$

$$(B^*) y = -e^{-x} + c$$

$$(C) y = 2e^x + 3e^{-x} + c$$

$$(D^*) ye^x + 1 = ce^x$$

Sol. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} (e^x + e^{-x}) + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x} \pm \sqrt{(e^x + e^{-x})^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x} \pm (e^x - e^{-x})}{2}$$

$$= e^x \text{ or } e^{-x}$$

$$\Rightarrow y = e^x + c \quad \text{or} \quad y = -e^{-x} + c$$

10. If $y = e^{-x} \cos x$ and $y_n + k_n y = 0$, where $y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$ and $k_n, n \in \mathbb{N}$ are constants.

$$\text{यदि } y = e^{-x} \cos x \text{ और } y_n + k_n y = 0 \text{ जहाँ } y_n = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ और } k_n, n \in \mathbb{N} \text{ अचर है-}$$

$$(A^*) k_4 = 4$$

$$(B^*) k_8 = -16$$

$$(C) k_{12} = 20$$

$$(D) k_{16} = -24$$





Sol. $y = e^{-x} \cos x$
 $y_1 = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x} (\sin x + \cos x)$
 $= -\sqrt{2} e^{-x} (\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4})$
 $y_1 = -\sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
 $y_2 = +\sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} e^{-x} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
 $\sqrt{2} = e^{-x} \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right)$
 $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$
 similarly इसी प्रकार
 $= (\sqrt{2})^2 e^{-x} \cos \left(x - \frac{2\pi}{4}\right)$
 $y_3 = -(\sqrt{2})^3 e^{-x} \cos \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
 $y_4 = +(\sqrt{2})^4 e^{-x} \cos \left(x - \frac{4\pi}{4}\right)$
 $= -(\sqrt{2})^4 e^{-x} \cos x$
 $y_4 + 4y = 0$
 Similarly इसी प्रकार
 $y_8 = (\sqrt{2})^8 e^{-x} \cos \left(x - \frac{8\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^8 e^{-x} \cos (x - 2\pi)$
 $= 16 e^{-x} \cos x$
 $y_8 - 16y = 0$

11. A solution of the differential equation $y_1 y_3 = 3y_2^2$ can be (where $y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$)

(A*) $x = A_1 y^2 + A_2 y + A_3$

(B*) $x = A_1 y + A_2$

(C*) $x = A_1 y^2 + A_2 y$

(D) $y = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$

अवकल समीकरण $y_1 y_3 = 3y_2^2$ का एक हल हो सकता है— (जहाँ $y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$)

(A) $x = A_1 y^2 + A_2 y + A_3$

(B) $x = A_1 y + A_2$

(C) $x = A_1 y^2 + A_2 y$

(D) $y = A_1 x^2 + A_2 x + A_3$

Sol. $y_1 y_3 = 3y_2^2$

$$\frac{y_3}{y_2} = 3 \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \ln y_2 = 3 \ln y_1 + \ln c$$

$$y_2 = c y_1^3$$

$$\frac{y_2}{y_1^2} = c y_1$$

$$-\frac{1}{y_1} = c y + c_2$$





$$\frac{dx}{dy} = -cy - c_2$$

$$x = -\frac{cy^2}{2} - c_2y + c_3$$

$$\therefore x = A_1y^2 + A_2y + A_3$$

12. A differentiable function satisfies equation $f(x) = \int_0^x (f(t)\cos t - \cos(t-x))dt$ then

(A*) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ [16JM120617]

(C) $f(x)$ has minimum value $1 - e^{-1}$

(D*) $f'(0) = -1$

समीकरण $f(x) = \int_0^x (f(t)\cos t - \cos(t-x))dt$ को संतुष्ट करने वाला एक अवकलनीय फलन है तब

(A*) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

(C) $f(x)$, का न्यूनतम मान $1 - e^{-1}$ है।

(D*) $f'(0) = -1$

Sol. $f(x) = \int_0^x f(t)\cos t - \int_0^x \cos(t-x)dt$

$$f(x) = \int_0^x f(t)\cos t - \int_0^x \cos t dt$$

$$f'(x) = f(x)\cos x - \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y\cos x - \cos x \quad (y = f(x))$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cos x = -\cos x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int -\cos x dx} = e^{-\sin x}$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{-\sin x} = \int -e^{-\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$y \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} + c$$

$$\Rightarrow y = ce^{\sin x} + 1$$

$$y = 0 \text{ when } x = 0$$

$$\Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - e^{\sin x}$$

$$f'(0) = f(0) - 1 = -1$$

$$f''(x) = f(x)(-\sin x) + \cos x \cdot f'(x) + \sin x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -1 + e + 1 = e$$

13. Let $f(x)$ is a continuous function which takes positive values for $x \geq 0$ and satisfy $\int_0^x f(t)dt = x\sqrt{f(x)}$ with

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ then}$$

[16JM120619]





$$(A) f(x) = \frac{1}{[1 + (1 - \sqrt{2})x]^2}$$

$$(B^*) f\left(\cot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

(C*) Area bounded by $f(x)$ and x -axis between $x = 0$ to $x = \sqrt{2} + 1$ is $\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$ square units.

$$(D) f\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

माना $f(x)$ सतत फलन है जो $x \geq 0$ के लिए धनात्मक मान लेता है तथा $\int_0^x f(t) dt = x\sqrt{f(x)}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ को संतुष्ट करता है तब

$$(A) f(x) = \frac{1}{[1 + (1 - \sqrt{2})x]^2}$$

$$(B^*) f\left(\cot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

(C*) $x = 0$ और $x = \sqrt{2} + 1$ के मध्य $f(x)$ और x -अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल $\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$ वर्ग इकाई है।

$$(D) f\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

Sol. $\int_0^x f(t) dt = x\sqrt{f(x)}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{xf'(x)}{2\sqrt{f(x)}} + \sqrt{f(x)} \quad \text{Let } f(x) = y^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x}{2y} \cdot 2y \frac{dy}{dx} + y \quad \Rightarrow \quad y^2 = x \frac{dy}{dx} + y$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln cx$$

$$\Rightarrow \left| \frac{y-1}{y} \right| = cx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = 1 \pm cx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{1 \pm cx}$$

$$\sqrt{f(x)} = \frac{1}{1 \pm cx}$$

$$\sqrt{f(1)} = \frac{1}{1 \pm c} \quad \Rightarrow \quad 1 \pm c = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = \pm(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{1 \pm (\sqrt{2} - 1)x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{(1 + (\sqrt{2} - 1)x)^2}$$

$$\left(f(x) = \frac{1}{(1 - (\sqrt{2} - 1)x)^2} \text{ is rejected अस्वीकार्य है} \right)$$





$$f\left(\cot \frac{\pi}{8}\right) = f(\sqrt{2} + 1) = \frac{1}{(1+2-1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{option (B) is correct.}$$

$$(C) \quad \text{Area क्षेत्रफल} = \int_0^{\sqrt{2}+1} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{(1+(\sqrt{2}-1)x)^2} dx - \frac{1}{(\sqrt{2}-1)} \left[\frac{1}{1+(\sqrt{2}-1)x} \right]_0^{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$(D) \quad f\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\left(1+(\sqrt{2}+1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{2}-1)^2} = \frac{2}{(2\sqrt{2}-1)^2}$$

14. Let $f(x)$, $x \geq 0$ be a non negative continuous function & let $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \geq 0$. If for some $c > 0$, $f(x) \leq$

$c F(x)$ for all $x \geq 0$ then

(A*) $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$

(B*) $f(0) = 0$

(C*) $e^{-cx} F(x)$ is a non-increasing function on $[0, \infty)$

(D) $F(x) \leq 0 \quad \forall x \leq 0$

माना $f(x)$, $x \geq 0$ अक्रियात्मक सतत फलन है। माना $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \geq 0$. यदि किसी $c > 0$, के लिए $f(x) \leq c F(x)$

सभी $x \geq 0$ के लिए तब

(A*) $f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0$

(B*) $f(0) = 0$

(C*) $e^{-cx} F(x)$, $[0, \infty)$ में वर्धमान फलन नहीं है।

(D) $F(x) \leq 0 \quad \forall x \leq 0$

Sol. Given that $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$\therefore F'(x) = f(x) \quad \dots(1)$$

$$f(x) \leq cF(x) \quad \forall x \geq 0$$

$$\therefore f(0) \leq cF(0)$$

$$\therefore f(0) \leq 0 \quad (\because F(0) = 0)$$

But given that $f(0) \geq 0$

$$\therefore f(0) = 0$$

$$f(x) - cF(x) \leq 0$$

$$F'(x) - cF(x) \leq 0$$

multiply by integrating factor e^{-cx}

$$\frac{d}{dx} (e^{-cx} F(x)) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{let } e^{-cx} F(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ is decreasing function } \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(0) \quad \forall x \geq 0$$

$$e^{-cx} F(x) \leq F(0) \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow e^{-cx} F(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow cF(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{but } f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \text{ (given)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$



Hindi. दिया गया है $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$\therefore F'(x) = f(x) \quad \dots(1)$$

$$f(x) \leq cF(x) \quad \forall x \geq 0$$

$$\therefore f(0) \leq cF(0)$$

$$\therefore f(0) \leq 0 \quad (\because F(0) = 0)$$

परन्तु दिया गया है $f(0) \geq 0$

$$\therefore f(0) = 0$$

$$f(x) - cF(x) \leq 0$$

$$F'(x) - cF(x) \leq 0$$

समाकल गुणक e^{-cx} से गुणा करने पर

$$\frac{d}{dx} (e^{-cx} F(x)) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{माना } e^{-cx} F(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{सभी } x \geq 0 \text{ के लिए } g(x) \text{ ह्रासमान है।}$$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(0) \quad \forall x \geq 0$$

$$e^{-cx} F(x) \leq F(0) \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow e^{-cx} F(x) \leq 0 \Rightarrow F(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow cF(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\text{परन्तु } f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0 \text{ (दिया गया है।)}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

15. A curve passing through (1, 0) such that the ratio of the square of the intercept cut by any tangent off the y-axis to the subnormal is equal to the ratio of the product of the co-ordinates of the point of tangency to the product of square of the slope of the tangent and the subtangent at the same point. Determine all such possible curves.

$$(A^*) x = e^{2\sqrt{y/x}} \quad (B) y = e^{2\sqrt{x/y}} \quad (C^*) x = e^{-2\sqrt{y/x}} \quad (D) x = e^{-2\sqrt{x/y}}$$

एक वक्र बिन्दु (1, 0) से इस प्रकार गुजरता है कि किसी स्पर्श रेखा के y-अन्तःखण्ड के वर्ग और अधोःलम्ब का अनुपात स्पर्श बिन्दु के निर्देशांकों के गुणनफल और उसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता के वर्ग एवं अधोःस्पर्शी के गुणनफल के अनुपात के बराबर है। ऐसे सभी सम्भव वक्र ज्ञात कीजिए।

$$(A^*) x = e^{2\sqrt{y/x}} \quad (B) y = e^{2\sqrt{x/y}} \quad (C^*) x = e^{-2\sqrt{y/x}} \quad (D) x = e^{-2\sqrt{x/y}}$$

Sol. $\frac{y^2 \text{int}}{\text{LSN}} = \frac{xy}{m^2 \text{LST}}$

$$\frac{(y - mx)^2}{|my|} = \frac{xy}{m^2 \left(\frac{y}{m}\right)}$$

$$m \neq 0 \quad y \neq 0$$

$$[y = 0 \text{ या } y = c \text{ हल नहीं है}]$$

$$(y - mx)^2 = xy$$

$$y - mx = \pm \sqrt{xy}$$

$$y \pm xy = mx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y \pm \sqrt{xy}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y}{x}}$$



$$\frac{y}{x} = t^2 \text{ रखने पर}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = t^2 + 2xt \frac{dt}{dx}$$

अब अवकल समीकरण

$$t^2 + 2xt \frac{dt}{dx} = t^2 \pm \sqrt{t}$$

हल करने पर $x = e^{2\sqrt{y/x}}; x = e^{-2\sqrt{y/x}}$

16. The differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} + y + \cot^2 x = 0$ must be satisfied by

अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + y + \cot^2 x = 0$ का हल होना चाहिए—

(A) $y = 2 + c_1 \cos x + \sqrt{c_2} \sin x$

(B*) $y = \cos x \cdot \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2$

(C*) $y = 2 + c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \log\left(\tan \frac{x}{2}\right)$

(D) all the above (उपरोक्त सभी)

Sol. (A) $\frac{dy}{dx} = -c_1 \sin x + \sqrt{c_2} \cos x$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -c_1 \cos x - \sqrt{c_2} \sin x = 2 - y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y + 2 = 0$$

(B) $\frac{dy}{dx} = \cos x \frac{\sec^2 x/2}{2 \tan \frac{x}{2}} - \sin x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \cot x - \sin x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\operatorname{cosec}^2 x - \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sin x} + \cos x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\cot^2 x - 2 - \cos x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y + \cot^2 x = 0$$

(C) $\frac{dy}{dx} = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{d}{dx} \left(\cos x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \right)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\cos x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -c_1 \cos x - c_2 \sin x - \cot^2 x - 2 - \cos x \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)$$





$$\frac{d^2y}{dx^2} + y + \cot^2 x = 0$$

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1

Differential equations are solved by reducing them to the exact differential of an expression in x & y i.e., they are reduced to the form $d(f(x, y)) = 0$
e.g. :

$$\begin{aligned} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{ydx - xdy}{x^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{2xdx + 2ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= - \frac{xdy - ydx}{x^2} \Rightarrow d(\sqrt{x^2 + y^2}) = -d\left(\frac{y}{x}\right) \\ \Rightarrow d\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x}\right) &= 0 \\ \therefore \text{solution is } \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} &= c. \end{aligned}$$

Use the above method to answer the following question (3 to 5)

1. The general solution of $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$ is
(A) $x^4 + x^2y^2 - y^4 = c$ (B*) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = c$ (C) $x^4 - x^2y^2 - y^4 = c$ (D) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$

Sol.

$$2x^3dx + 2y^3dy - (xy^2dx + x^2ydy) = 0$$

$$d\left(\frac{x^4}{2}\right) + d\left(\frac{y^4}{2}\right) - \frac{1}{2}d(x^2y^2) = 0$$

$$\Rightarrow d(x^4 + y^4 - x^2y^2) = 0 \Rightarrow x^4 + y^4 - x^2y^2 = c$$

2. General solution of the differential equation $\frac{xdy}{x^2 + y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx = 0$ is

(A*) $x + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (B) $x + \tan^{-1}\frac{x}{y} = c$ (C) $x - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (D) none of these

Sol. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + dx = 0 \Rightarrow \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + dx = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + dx = 0$

$$\Rightarrow d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) + dx = 0 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x = c$$

3. General solution of the differential equation $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ is





(A*) $xe^y - y^2 = c$ (B) $ye^x - x^2 = c$ (C) $ye^y + x = c$ (D) $xe^y - 1 = cy^2$

Sol. $e^y dx + xe^y dy - 2y dy = 0$
 $d(xe^y) - d(y^2) = 0$
 Solution is $xe^y - y^2 = c$

अनुच्छेद # 1

अवकल समीकरणों को x और y में व्यंजक के यथार्थ अवकलन के रूप में व्यक्त करके हल किया जा सकता है अर्थात् उन्हें

$d(f(x, y)) = 0$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
 जैसे

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{2xdx + 2ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -d\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = -d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow d\left(\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\therefore \text{हल } \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = c \text{ है।}$$

उपरोक्त विधि का उपयोग करके नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

1. $(2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2y) dy = 0$ का सामान्य हल है —
 (A) $x^4 + x^2y^2 - y^4 = c$ (B*) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = c$ (C) $x^4 - x^2y^2 - y^4 = c$ (D) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = c$

Sol. (B)
 $2x^3 dx + 2y^3 dy - (xy^2 dx + x^2y dy) = 0$
 $d\left(\frac{x^4}{2}\right) + d\left(\frac{y^4}{2}\right) - \frac{1}{2} d(x^2 y^2) = 0$
 $\Rightarrow d(x^4 + y^4 - x^2 y^2) = 0 \Rightarrow x^4 + y^4 - x^2 y^2 = c$

2. $\frac{xdy}{x^2 + y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx = 0$ का सामान्य हल है —

(A*) $x + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (B) $x + \tan^{-1} \frac{x}{y} = c$ (C) $x - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + dx = 0 \Rightarrow \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + dx = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + dx = 0$
 $\Rightarrow d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) + dx = 0 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x = c$

3. $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ का सामान्य हल है —
 (A*) $xe^y - y^2 = c$ (B) $ye^x - x^2 = c$ (C) $ye^y + x = c$ (D) $xe^y - 1 = cy^2$

Sol. $e^y dx + xe^y dy - 2y dy = 0$
 $d(xe^y) - d(y^2) = 0$
 Solution is $xe^y - y^2 = c$ (हल है)

Comprehension # 2



In order to solve the differential equation of the form $a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$, where

a_0, a_1, a_2 are constants.

We take the auxiliary equation $a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n = 0$

Find the roots of this equation and then solution of the given differential equation will be as given in the following table.

Roots of the auxiliary equation function	Corresponding complementary
1. One real root α_1	$c_1 e^{\alpha_1 x}$
2. Two real and different roots α_1 and α_2	$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$
3. Two real and equal roots α_1 and α_1	$(c_1 + c_2 x) e^{\alpha_1 x}$
4. Three real and equal roots $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1$	$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{\alpha_1 x}$
5. One pair of imaginary roots $\alpha \pm i\beta$	$(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$
6. Two pair of equal imaginary roots $\alpha \pm i\beta$ and $\alpha \pm i\beta$	$[(c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_1 + c_2 x) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

Solution of the given differential equation will be $y =$ sum of all the corresponding parts of the complementary functions.

4. Solve $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$. [16JM120621]
 (A*) $y = (c_1 + c_2 x) e^x$ (B) $y = (c_1 e^x + c_2 e^x)$ (C) $y = (c_1 x) e^x$ (D) none of these

5. Solve $\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$. [16JM120622]
 (A) $y = (c_1 \cos ax + c_2 \sin ax) e^{ax}$ (B*) $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$
 (C) $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$ (D) none of these

6. Solve $\frac{d^3 y}{dx^3} - 6 \frac{d^2 y}{dx^2} + 11 \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ [16JM120623]
 (A) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$ (B) $y = x (c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x})$
 (C*) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ (D) none of these

Sol.

4. $D^2 - 2D + 1 = 0$
 $(D - 1)^2 = 0$
 Two real and equal roots $\alpha_1 = 1$
 $y = (C_1 + C_2 x) e^x$

5. $D^2 + a^2 = 0$
 $D = \pm ai$ one pair of imaginary roots $\alpha \pm i\beta$
 $\alpha = 0, \beta = a$
 $y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$
 $y = (C_1 \cos ax + C_2 \sin ax)$

6. $D^3 - 6D^2 + 11D - 6 = 0 \Rightarrow D^3 - D^2 - 5D^2 + 5D + 6D - 6 = 0 \Rightarrow (D - 1)(D^2 - 5D + 6) = 0$
 $\Rightarrow (D - 1)(D - 2)(D - 3) = 0$
 three real and different roots $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$
 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$



अनुच्छेद # 2

प्रारूप $a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n y = 0$ जहाँ a_0, a_1, a_2 अचर है, की अवकल समीकरण को हल करने के लिए

हम सहायक समीकरण $a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n = 0$ लेते हैं।

उस समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए तथा अब दी गई अवकल समीकरण का हल निम्नलिखित तालिका से लिखिए—
सहायक समीकरण के मूल संगत पूरक फलन

- | | |
|--|--|
| 1. एक वास्तविक मूल α_1 | $c_1 e^{\alpha_1 x}$ |
| 2. दो वास्तविक एवं भिन्न भिन्न मूल α_1 और α_2 | $c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$ |
| 3. दो वास्तविक एवं समान मूल α_1 और α_1 | $(c_1 + c_2 x) e^{\alpha_1 x}$ |
| 4. तीन वास्तविक एवं समान मूल $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1$ | $(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{\alpha_1 x}$ |
| 5. काल्पनिक मूलों का एक युग्म $\alpha \pm i\beta$ | $(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$ |
| 6. काल्पनिक मूलों के दो युग्म समान $\alpha \pm i\beta$ तथा $\alpha \pm i\beta$ | $[(c_1 + c_2 x) \cos \beta x + (c_3 + c_4 x) \sin \beta x] e^{\alpha x}$ |
- दी गई अवकल समीकरण का हल $y =$ पूरक फलन के सभी भागों का योगफल द्वारा दिया जाता है।

4. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$ को हल कीजिए—

- (A*) $y = (c_1 + c_2 x) e^x$ (B) $y = (c_1 e^x + c_2 e^x)$ (C) $y = (c_1 x) e^x$ (D) इनमें से कोई नहीं

5. $\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = 0$ को हल कीजिए—

- (A) $y = (c_1 \cos ax + c_2 \sin ax) e^{ax}$ (B*) $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$
(C) $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. $\frac{d^3 y}{dx^3} - 6 \frac{d^2 y}{dx^2} + 11 \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ को हल कीजिए—

- (A) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$ (B) $y = x (c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x})$
(C*) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol.

4. $D^2 - 2D + 1 = 0$
 $(D - 1)^2 = 0$

दो वास्तविक एवं समान मूल $\alpha_1 = 1$ है।

$y = (C_1 + C_2 x) e^x$

5. $D^2 + a^2 = 0$

$D = \pm ai$

काल्पनिक मूलों का एक युग्म $\alpha \pm i\beta$ है।

$\alpha = 0, \beta = a$

$y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$

$y = (C_1 \cos ax + C_2 \sin ax)$

6. $D^3 - 6D^2 + 11D - 6 = 0 \Rightarrow D^3 - D^2 - 5D^2 + 5D + 6D - 6 = 0 \Rightarrow (D - 1)(D^2 - 5D + 6) = 0$
 $\Rightarrow (D - 1)(D - 2)(D - 3) = 0$

तीन वास्तविक एवं भिन्न-भिन्न मूल $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ है।

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$


Comprehension # 3 (Q.No. 7 to 9)

- Let $f(x)$ be a differentiable function, satisfying $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$ and $f''(x) = f(x)$
7. Graph of $y = f(x)$ cuts x -axis at
 (A*) $x = -\frac{1}{2} \ln 5$ (B) $x = \frac{1}{2} \ln 5$ (C) $x = -\ln 5$ (D) $x = \ln 5$
8. Area enclosed by $y = f(x)$ in the second quadrant is
 (A) $3 + \frac{1}{2} \ln \sqrt{5}$ (B) $2 + \frac{1}{2} \ln 5$ (C*) $3 - \sqrt{5}$ (D) 3
9. Area enclosed by $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$, $x + y = 2$ and $x + y = -\frac{1}{2} \ln 5$ is
 (A) $8 + \frac{1}{8} (\ln 5)^2$ (B*) $8 - 2\sqrt{5} + \frac{1}{8} (\ln 5)^2$ (C) $2\sqrt{5} - \frac{1}{8} (\ln 5)^2$ (D) $8 + 2\sqrt{5} - \frac{1}{8} (\ln 5)^2$

Sol.

$$2f''(x) f'(x) = 2f(x) f'(x)$$

Integrating

$$(f'(x))^2 = (f(x))^2 + c$$

$$\text{put } x = 0$$

$$\Rightarrow c = 5$$

$$(f'(x))^2 = (f(x))^2 + 5$$

$$\text{put } y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y^2 + 5}$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + 5}) = \pm x + c_1$$

$$x = 0, y = 2 \Rightarrow c_1 = \ln 5$$

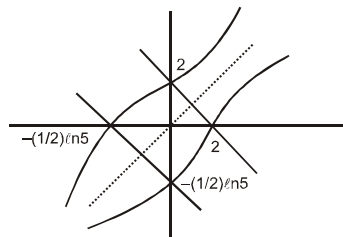
$$\frac{y + \sqrt{y^2 + 5}}{5} = e^{\pm x}$$

$$y = \frac{5e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{or} \quad y = \frac{5e^{-x} - e^x}{2}$$

$$\text{If } f(x) = \frac{5e^{-x} - e^x}{2}; f'(0) = 3 \text{ is not satisfied} \Rightarrow f(x) = \frac{5e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{put } f(x) = 0 \Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ln 5$$

$$f'(x) = \frac{5e^x + e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ is increasing}$$



Figure

$$\text{Area in second quadrant} = \int_{-\frac{1}{2} \ln 5}^0 \left(\frac{5e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = \left[\frac{5e^x + e^{-x}}{2} \right]_{-\frac{1}{2} \ln 5}^0 = 3 - \sqrt{5}$$

$$\text{Area by lines } x + y = 2, x + y = -\frac{1}{2} \ln 5,$$

$$y = f(x) \text{ and } y = f^{-1}(x) \text{ is } 2(3 - \sqrt{5}) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln 5 \right) \left(\frac{1}{2} \ln 5 \right)$$



$$= 8 - 2\sqrt{5} + \frac{1}{8}(\ln 5)^2$$

अनुच्छेद # 3 (Q.No. 7 to 9)

माना $f(x)$ एक अवकलनीय फलन है जो $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$ तथा $f''(x) = f(x)$ को संतुष्ट करता है

7. $y = f(x)$ का आरेख x -अक्ष को काटता है—

(A*) $x = -\frac{1}{2}\ln 5$ (B) $x = \frac{1}{2}\ln 5$ (C) $x = -\ln 5$ (D) $x = \ln 5$

8. द्वितीय चतुर्थांश में $y = f(x)$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है—

(A) $3 + \frac{1}{2}\ln\sqrt{5}$ (B) $2 + \frac{1}{2}\ln 5$ (C*) $3 - \sqrt{5}$ (D) 3

9. $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$, $x + y = 2$ तथा $x + y = \frac{-1}{2}\ln 5$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है—

(A) $8 + \frac{1}{8}(\ln 5)^2$ (B*) $8 - 2\sqrt{5} + \frac{1}{8}(\ln 5)^2$ (C) $2\sqrt{5} - \frac{1}{8}(\ln 5)^2$ (D) $8 + 2\sqrt{5} - \frac{1}{8}(\ln 5)^2$

Sol.

$$2f''(x)f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

समाकलन करने पर $(f'(x))^2 = (f(x))^2 + c$

$x = 0$ रखने पर $\Rightarrow c = 5$

$$(f'(x))^2 = (f(x))^2 + 5$$

$y = f(x)$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{y^2 + 5}$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + 5}) = \pm x + c_1$$

$x = 0, y = 2 \Rightarrow c_1 = \ln 5$

$$\frac{y + \sqrt{y^2 + 5}}{5} = e^{\pm x}$$

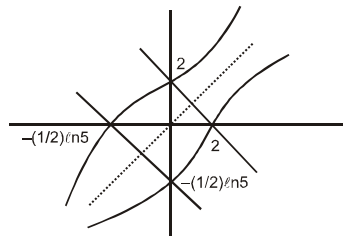
$y = \frac{5e^x - e^{-x}}{2}$ या $y = \frac{5e^{-x} - e^x}{2}$

यदि $f(x) = \frac{5e^x - e^{-x}}{2}$ है, तो $f'(0) = 3$ संतुष्ट नहीं होता है।

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5e^x - e^{-x}}{2}$$

$f(x) = 0$ रखने पर $\Rightarrow 2x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ln 5$

$f'(x) = \frac{5e^x + e^{-x}}{2} > 0 \Rightarrow f(x)$ वर्धमान है।



Figure

द्वितीय चतुर्थांश में क्षेत्रफल $= \int_{-\frac{1}{2}\ln 5}^0 \left(\frac{5e^x - e^{-x}}{2} \right) dx$





$$= \frac{5e^x + e^{-x}}{2} \Bigg|_{-\frac{1}{2}\ln 5}^0 = 3 - \sqrt{5}$$

रेखाओं $x + y = 2$, $x + y = -\frac{1}{2}\ln 5$,

$$y = f(x) \text{ तथा } y = f^{-1}(x) \text{ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल } 2(3 - \sqrt{5}) + \frac{1}{2} \cdot 2.2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln 5 \right) \left(\frac{1}{2} \ln 5 \right)$$

$$= 8 - 2\sqrt{5} + \frac{1}{8}(\ln 5)^2$$





Exercise-3

Marked questions are recommended for Revision.

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

* Marked Questions may have more than one correct option.

* चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षों) के प्रश्न

1. Let f be a real-valued differentiable function on $\mathbf{R}$ (the set of all real numbers) such that $f(1) = 1$. If the y -intercept of the tangent at any point $P(x, y)$ on the curve $y = f(x)$ is equal to the cube of the abscissa of P , then the value of $f(-3)$ is equal to [IIT-JEE 2010, Paper-1, (3, 0), 84]

माना कि $\mathbf{R}$ पर परिभाषित वास्तविक मानों वाला फलन f इस प्रकार है कि $f(1) = 1$ । यदि वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु $P(x, y)$ पर खींची गई स्पर्शी का y -अन्तःखण्ड, P के भुज के घन के बराबर हो, तो $f(-3)$ का मान है।

Ans. 9

Sol. $Y - y = m(X - x)$

Y -intercept y -अन्तःखण्ड ($X = 0$)

$Y = y - mx$

Given that दिया गया है कि $y - mx = x^3 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} - y = -x^3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -x^2$$

Integrating factor समाकल गुणांक (I.F.) = $e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x}$

$$\text{solution हल } y \cdot \frac{1}{x} = \int \frac{1}{x} \cdot (-x^2) dx \Rightarrow f(x) = y = -\frac{x^3}{2} + cx$$

$$\text{Given दिया गया है कि } f(1) = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{3x}{2} \Rightarrow f(-3) = 9$$

2. Let $f : [1, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ be a differentiable function such that $f(1) = 2$. If $6 \int_1^x f(t) dt = 3xf(x) - x^3$ for all $x \geq 1$, then the value of $f(2)$ is

माना कि $f : [1, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ एक अवकलनीय फलन (differentiable function) है जबकि $f(1) = 2$ है। यदि $x \geq 1$ के

सभी मानों के लिये $6 \int_1^x f(t) dt = 3xf(x) - x^3$ मान्य है, तब $f(2)$ का मान है। [IIT-JEE 2011, Paper-1, (4, 0), 80]

Ans. Bonus (Taking $x = 1$, the integral becomes zero, whereas the right side of the equation gives 5. Therefore, the function f does not exist.)

Ans. बोनस ($x = 1$ लेने पर समाकलन शून्य हो जाता है, जबकि समीकरण दाहिना भाग 5 देता है इसलिए फलन का अस्तित्व नहीं है।)

Sol. Data inconsistent.

Putting $x = 1$, in given integral equation $\Rightarrow f(1) = 1/3$, a contradiction (given that $f(1) = 2$).



Resonance
Educating for better tomorrow

Corporate Office: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005
Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in
Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 1



However if considering integral equation as $6 \int_1^x f(t) dt = 3xf(x) - x^3 - 5$

we obtain correct answer.

Differentiating the integral equation

$$6f(x) = 3f(x) + 3xf'(x) - 3x^2$$

$$f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = x$$

put $y = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = x$$

$$\text{I.F.} = \frac{1}{x}$$

General solution is $y \cdot \frac{1}{x} = x + c$

$$\text{Put } x = 1, y = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = x^2 + x$$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(2) = 4 + 2 = 6$$

Hindi. **आँकड़े असंगत**

$x = 1$ रखने पर दी गयी समीकरण में $f(1) = 1/3$ विरोधाभास (दिया गया है $f(1) = 2$).

फिर भी यदि समीकरण $6 \int_1^x f(t) dt = 3xf(x) - x^3 - 5$ को मानने पर सही उत्तर प्राप्त करते हैं।

अवकलन करने पर

$$6f(x) = 3f(x) + 3xf'(x) - 3x^2$$

$$f'(x) - \frac{1}{x} f(x) = x$$

$y = f(x)$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = x$$

$$\text{I.F.} = \frac{1}{x}$$

व्यापक हल $y \cdot \frac{1}{x} = x + c$

$$x = 1, y = 2 \text{ रखने पर } \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = x^2 + x$$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(2) = 4 + 2 = 6$$

3. Let $y'(x) + y(x) g'(x) = g(x) g'(x)$, $y(0) = 0$, $x \in \mathbf{R}$, where $f'(x)$ denotes $\frac{df(x)}{dx}$ and $g(x)$ is a given non-constant differentiable function on $\mathbf{R}$ with $g(0) = g(2) = 0$. Then the value of $y(2)$ is

माना कि $y'(x) + y(x) g'(x) = g(x) g'(x)$, $y(0) = 0$, $x \in \mathbf{R}$, जहाँ $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ और $g(x)$ एक अचेतर अवकलनीय फलन (non-constant differentiable function) $\mathbf{R}$ पर परिभाषित है, जिसके लिये $g(0) = g(2) = 0$ है। तब $y(2)$ का मान है।

[IIT-JEE 2011, Paper-2, (4, 0), 80]

Ans. 0

Sol. $y'(x) + y(x) g'(x) = g(x) g'(x)$, $y(0) = 0 \forall x \in \mathbf{R}$

$$\frac{d}{dx} (y(x)) + y(x) g'(x) = g(x) g'(x), \quad g(0) = g(2) = 0.$$



$$I \cdot F = e^{\int g'(x) dx} = e^{g(x)}$$

$$y(x) e^{g(x)} = \int e^{g(x)} g(x) g'(x) dx + c$$

$$\text{Let } g(x) = t$$

$$g'(x) dx = dt$$

$$y(x) e^{g(x)} = \int t e^t dt$$

$$= t e^t - e^t + c$$

$$y(x) = (g(x)-1) + c e^{-g(x)}$$

$$\text{Let } x=0 \quad y(0) = (g(0)-1) + c e^{-g(0)}$$

$$0 = (0-1) + c \Rightarrow c = 1$$

$$y(x) = (g(x)-1) + e^{-g(x)}$$

$$y(2) = (g(2)-1) + e^{-g(2)}$$

$$y(2) = (0-1) + e^{-(0)} = -1 + 1 = 0$$

Hindi. $y'(x) + y(x) g'(x) = g(x) g'(x)$, $y(0) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} (y(x)) + y(x) g'(x) = g(x) g'(x), \quad g(0) = g(2) = 0.$$

$$I \cdot F = e^{\int g'(x) dx} = e^{g(x)}$$

$$y(x) e^{g(x)} = \int e^{g(x)} g(x) g'(x) dx + c$$

$$\text{माना } g(x) = t$$

$$g'(x) dx = dt$$

$$y(x) e^{g(x)} = \int t e^t dt = t e^t - e^t + c$$

$$y(x) = (g(x)-1) + c e^{-g(x)}$$

$$\text{माना } x=0 \quad y(0) = (g(0)-1) + c e^{-g(0)}$$

$$0 = (0-1) + c \Rightarrow c = 1$$

$$y(x) = (g(x)-1) + e^{-g(x)}$$

$$y(2) = (g(2)-1) + e^{-g(2)}$$

$$y(2) = (0-1) + e^{-(0)} = -1 + 1 = 0$$

4.* If $y(x)$ satisfies the differential equation $y' - y \tan x = 2x \sec x$ and $y(0) = 0$, then

(Revision Planner)

यदि $y(x)$ अवकल समीकरण $y' - y \tan x = 2x \sec x$ को संतुष्ट करता है और $y(0) = 0$, तब

$$(A^*) \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

$$(B) \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{18}$$

[IIT-JEE 2012, Paper-1, (4, 0), 70]

$$(C) \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$$

$$(D^*) \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$$

Sol. $\frac{dy}{dx} - y \tan x = 2x \sec x$

$$y(0) = 0$$

$$I.F. = e^{-\int \tan x dx} = e^{-\log \sec x}$$

$$I.F. = \cos x$$

$$\cos x \cdot y = \int 2x \sec x \cdot \cos x dx$$

$$\cos x \cdot y = x^2 + c$$

$$c = 0$$

$$y = x^2 \sec x$$



$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{\pi^2}{16} \cdot \sqrt{2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9} \cdot 2 = \frac{2\pi^2}{9}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 + \frac{\pi^2}{9} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

5. A curve passes through the point $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$. Let the slope of the curve at each point (x, y) be $\frac{y}{x} + \sec\left(\frac{y}{x}\right)$, $x > 0$. Then the equation of the curve is **(Differential Equation) XII**

एक वक्र बिन्दु $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ से गुजरता है। माना कि प्रत्येक बिन्दु (x, y) पर वक्र की प्रवणता $\frac{y}{x} + \sec\left(\frac{y}{x}\right)$, $x > 0$ है, तब

वक्र का समीकरण है—

[JEE (Advanced) 2013, Paper-1, (2, 0)/60]

(A*) $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + \frac{1}{2}$

(B) $\operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + 2$

(C) $\sec\left(\frac{2y}{x}\right) = \log x + 2$

(D) $\cos\left(\frac{2y}{x}\right) = \log x + \frac{1}{2}$

Sol.

(A)

Given slope at (x, y) is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sec(y/x)$$

$$\text{let } \frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}$$

$$t + x \frac{dt}{dx} = t + \sec(t)$$

$$\int \cos t \, dt = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\sin t = \ln x + c$$

$$\sin(y/x) = \ln x + c$$

This curve passes through $(1, \pi/6)$

$$\sin(\pi/6) = \ln(1) + c \Rightarrow c = 1/2$$

$$\sin(y/x) = \ln x + 1/2$$

Hindi. (A)

(x, y) पर दी गई प्रवणता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sec(y/x)$$

$$\text{let } \frac{y}{x} = t \Rightarrow y = xt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}$$

$$t + x \frac{dt}{dx} = t + \sec(t)$$



$$\int \cos t \, dt = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\sin t = \ln x + c$$

$$\sin(y/x) = \ln x + c$$

यह वक्र $(1, \pi/6)$ से गुजरती है

$$\sin(\pi/6) = \ln(1) + c \Rightarrow c = 1/2$$

$$\sin(y/x) = \ln x + 1/2$$

6. The function $y = f(x)$ is the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2-1} = \frac{x^4+2x}{\sqrt{1-x^2}}$ in $(-1, 1)$,

1) satisfying $f(0) = 0$. Then $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x) dx$ is [JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, -1)/60]

फलन $y = f(x)$ निम्न अवकलनीय समीकरण (differential equation) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2-1} = \frac{x^4+2x}{\sqrt{1-x^2}}$

का अंतराल $(-1, 1)$ में हल है एवम् $f(0) = 0$ को सन्तुष्ट करता है। तब $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x) dx$ का मान है—

[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, -1)/60]

- (A) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (B*) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ans. (B)

Sol. I.F. = $e^{\int \frac{x}{x^2-1} dx} = e^{\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln|x^2-1|} = e^{\frac{1}{2} \ln(1-x^2)} = \sqrt{1-x^2}$

$$\therefore y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{x^4+2x}{\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{1-x^2} dx + c$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \frac{x^5}{5} + x^2 + c$$

$$x=0, y=0 \Rightarrow c=0$$

$$y = \frac{\frac{x^5}{5} + x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\frac{x^5}{5} + x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-\frac{x^5}{5} + x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta \, d\theta$$



$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

7. Let $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function which is continuous on $[0, 2]$ and is differentiable on $(0, 2)$ with $f(0) = 1$.

Let $F(x) = \int_0^{x^2} f(\sqrt{t}) dt$ for $x \in [0, 2]$. If $F'(x) = f'(x)$ for all $x \in (0, 2)$, then $F(2)$ equals

[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, -1)/60]

माना $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा फलन है जो $[0, 2]$ पर संतत (continuous) है एवं $(0, 2)$ पर अवकलनीय (differentiable) है तथा $f(0) = 1$ है। माना कि सभी $x \in [0, 2]$ के लिये $F(x) = \int_0^{x^2} f(\sqrt{t}) dt$ है। यदि सभी $x \in (0, 2)$ के लिये $F'(x) = f'(x)$ है, तब $F(2)$ का मान है—

[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, -1)/60]

(A) $e^2 - 1$ (B*) $e^4 - 1$ (C) $e - 1$ (D) e^4

Ans. (B)

Sol. $f'(x) = 2x f(x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x$$

$$\ln(f(x)) = x^2 + c$$

$$x = 0, f(0) = 1$$

$$c = 0$$

$$\therefore \ln(f(x)) = x^2$$

$$f(x) = e^{x^2}$$

$$\therefore F(x) = f(x) + c$$

$$F(x) = e^{x^2} + c$$

$$F(0) = 0$$

$$\therefore c = -1$$

$$\therefore f(x) = e^{x^2} - 1$$

$$f(2) = e^4 - 1.$$

8*. Let $y(x)$ be a solution of the differential equation $(1 + e^x)y' + ye^x = 1$. If $y(0) = 2$, then which of the following statements is (are) true ? [JEE (Advanced) 2015, P-1 (4, -2)/ 88]

(A*) $y(-4) = 0$

(B) $y(-2) = 0$

(C*) $y(x)$ has a critical point in the interval $(-1, 0)$

(D) $y(x)$ has no critical point in the interval $(-1, 0)$

मान कि $y(x)$ अवकल समीकरण $(1 + e^x)y' + ye^x = 1$ का हल है। यदि $y(0) = 2$ तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सही है (हैं) ? [JEE (Advanced) 2015, P-1 (4, -2)/ 88]

(A*) $y(-4) = 0$

(B) $y(-2) = 0$

(C*) $y(x)$ का एक क्रांतिक बिन्दु (critical point) अंतराल $(-1, 0)$ में है।

(D) $y(x)$ का कोई भी क्रांतिक बिन्दु (critical point) अंतराल $(-1, 0)$ में नहीं है।

Ans. (A,C)

Sol. $(1 + e^x) \frac{dy}{dx} + ye^x = 1$



$$\frac{dy}{dx} + \frac{e^x}{1+e^x} y = \frac{1}{1+e^x}$$

$$I.F = e^{\int \frac{e^x}{1+e^x} dx} = e^{\ln(1+e^x)} = 1 + e^x$$

complete solution पूर्ण हल

$$y.(1 + e^x) = \int 1 dx$$

$$(1 + e^x)y = x + c$$

$$x = 0, y = 2 \Rightarrow c = 4$$

$$(1 + e^x)y = x + 4$$

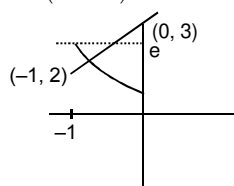
$$y = \frac{x+4}{e^x+1}$$

$$x = -4, y = 0$$

$$x = -2, y = \frac{2}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1) \cdot 1 - (x+4)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{e^x(-x-3)+1}{(e^x+1)^2}$$



$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x + 3 = e^{-x}$$

$$e^x = \frac{1}{x+3}$$

- 9*. Consider the family of all circles whose centers lie on the straight line $y = x$. If this family of circles is represented by the differential equation $Py'' + Qy' + 1 = 0$, where P, Q are functions of x, y and y' (here $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$), then which of the following statements is (are) true?

(A) $P = y + x$

(B*) $P = y - x$

(C*) $P + Q = 1 - x + y + y' + (y')^2$

(D) $P - Q = x + y - y' - (y')^2$

उन सभी वृत्त-कुल (family of circles) को विचार कीजिए जिनके केन्द्र सरल रेखा $y = x$ पर स्थित है। यदि इस वृत्त-कुल के सभी वृत्त, अवकल समीकरण $Py'' + Qy' + 1 = 0$, से निरूपित होते हैं, जहाँ P, Q इस प्रकार हैं कि वे

x, y और y' के फलन हैं (यहाँ $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$), तब निम्नलिखित कथनों में से कौन सा(से) सही है (हैं)?

[JEE (Advanced) 2015, P-1 (4, -2)/ 88]

(A) $P = y + x$

(B*) $P = y - x$

(C*) $P + Q = 1 - x + y + y' + (y')^2$

(D) $P - Q = x + y - y' - (y')^2$

Ans.

(B,C)

Sol.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + 2\alpha^2 - r^2 = 0$$

$$2x + 2yy' - 2\alpha - 2\alpha y' = 0 \quad \dots(i)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{x + yy'}{1 + y'} \quad \dots(ii)$$

again diff. w.r.t.

पुनः अवकलन करने पर



$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' - \left(\frac{x+yy'}{1+y'} \right) 2\alpha y'' = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + (y')^2 + yy' - y'' &= 0 \\ \Rightarrow 1 + y' + (y')^2 + (y')^3 + yy'' + yy'y' - xy'' - yy'y'' &= 0 \\ \Rightarrow (y-x)y'' + (1+y+(y')^2)y' + 1 &= 0 \\ \Rightarrow P = y-x, Q = 1+y' + (y')^2 \end{aligned}$$

Ans. (B,C)

Note : P & Q will not be unique function as

$$Py'' + Qy' + Ry' - Ry' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Py'}{1-Ry''} + \frac{Qy'}{1-Ry'} + 1 = 0 \text{ Hence new P \& Q can be obtained.}$$

So it can be a controversial problem.

नोट : P तथा Q अद्वितीय फलन नहीं है जैसा कि

$$Py'' + Qy' + Ry' - Ry' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Py'}{1-Ry''} + \frac{Qy'}{1-Ry'} + 1 = 0 \text{ अतः नये P तथा Q प्राप्त किये जा सकते हैं।}$$

अतः यह विवादास्पद प्रश्न है।

10. Let $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function such that $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$ for all $x \in (0, \infty)$ and $f(1) \neq 1$.

Then

[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (3, -1)/62]

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (B) \lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \quad (C) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f'(x) = 0 \quad (D) |f(x)| \leq 2 \text{ for all } x \in (0, 2)$$

माना कि $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ एक अवकलनीय (differentiable) फलन ऐसा है कि सभी $x \in (0, \infty)$ के लिए

$$f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x} \text{ और } f(1) \neq 1 \text{ है। तब}$$

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (B) \lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \quad (C) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f'(x) = 0 \quad (D) \text{ सभी } x \in (0, 2) \text{ के लिए } |f(x)| \leq 2$$

Ans. (A)

Sol. $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$ or $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\text{solution is अतः हल है : } y \times x = \int 2x dx = x^2 + C$$

$$\text{or } y = x + \frac{C}{x} \text{ \& C \neq 0 as चूंकि } f(1) \neq 1$$

$$(A) \lim_{x \rightarrow 0^+} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - cx^2) = 1$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + cx^2 = 1$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - C = -C \neq 0$$

$$(D) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow +\infty \text{ or } -\infty$$

Hence only (A) is correct अतः केवल (A) सही है।

- 11*. A solution curve of the differential equation $(x^2 + xy + 4x + 2y + 4) \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$, $x > 0$, passes through the point

(1, 3). Then the solution curve [JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (4, -2)/62]

(A) intersects $y = x + 2$ exactly at one point

(B) intersects $y = x + 2$ exactly at two points

(C) intersects $y = (x + 2)^2$

(D) does NOT intersect $y = (x + 3)^2$



माना कि अवकल समीकरण (differential equation) $(x^2 + xy + 4x + 2y + 4) \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$, $x > 0$, का एक हल वक्र

(solution curve) बिन्दु $(1, 3)$ से गुजरता है। तब वह हल वक्र

(A) $y = x + 2$ को ठीक एक बिन्दु (exactly one point) पर प्रतिच्छेदित (intersect) करता है

(B) $y = x + 2$ को ठीक दो बिन्दुओं (exactly at two points) पर प्रतिच्छेदित करता है

(C) $y = (x + 2)^2$ को प्रतिच्छेदित करता है

(D) $y = (x + 3)^2$ को प्रतिच्छेदित नहीं करता है

Ans. (AD)

Sol. $[(x + 2)(x + 2 + y)] \frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \Rightarrow y = (x + 2)t$

$$\frac{dy}{dx} = (x + 2) \frac{dt}{dx} + t \Rightarrow ((x + 2)(x + 2 + (x + 2)t) \left((x + 2) \frac{dt}{dx} + t \right) - (x + 2)^2 t^2 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0 \text{ or } (1 + t) \left((x + 2) \frac{dt}{dx} + t \right) - t^2 = 0 \Rightarrow (x + 2) (1 + t) \frac{dt}{dx} + t = 0$$

$$\left(\frac{1+t}{t} \right) dt = - \frac{dx}{x+2}$$

$$\ln t + t = -\ln(x + 2) + c \Rightarrow \ln \left(\frac{y}{x+2} \right) + \left(\frac{y}{x+2} \right) = -\ln(x + 2) + c$$

$$\ln y - \ln(x + 2) + \frac{y}{x+2} = -\ln(x + 2) + c \Rightarrow \ln y + \frac{y}{x+2} = c$$

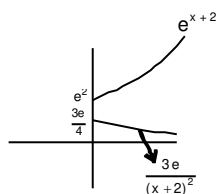
$$\ln 3 + \frac{3}{3} = +c \Rightarrow c = \ln 3 + 1 \Rightarrow \ln y + \frac{y}{x+2} = \ln 3e$$

(A) $\ln y + \frac{y}{x+2} = \ln 3e$ $\Rightarrow \ln(x + 2) + 1 = \ln 3 + 1$

$\Rightarrow$ one solution एक हल

(C) $\ln(x + 2)^2 + \frac{(x+2)^2}{x+2} = \ln 3 + 1 \Rightarrow 2\ln(x + 2) + (x + 2) = \ln 3e$

$$(x + 2)^2 e^{(x+2)} = 3e \Rightarrow e^{x+2} = \frac{3e}{(x+2)^2}$$



no solution कोई हल नहीं

$$(D) y = (x + 3)^2 \Rightarrow \ln(x + 3)^2 + \frac{(x+3)^2}{x+2} = \ln 3 + 1$$

$$2\ln(x + 3) + \frac{(x+2)^2 + 1 + 2(x+2)}{x+2} = \ln 3 + 1$$

$$g(x) = 2\ln(x + 3) + (x + 2) + 2 + \frac{1}{(x+2)} - \ln 3 - 1$$

$$g'(x) = \frac{2}{(x+3)} + 1 + 0 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)^2 - (x+3)}{(x+3)(x+2)^2} + 1 = \frac{2x^2 + 8x + 8 - x - 3}{(x+3)(x+2)^2} + 1 > 0$$

$$g(x) \text{ increasing वर्द्धमान है।} \Rightarrow g(0) = 2\ln 3 + 2 + 1 + \frac{1}{2} - \ln 3 = \ln 3 + \frac{7}{2}$$

which is positive, thus no solution जो धनात्मक है, अतः कोई हल नहीं।





12. If $y = y(x)$ satisfies the differential equation $8\sqrt{x}(\sqrt{9+\sqrt{x}})dy = \left(\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}\right)^{-1} dx$, $x > 0$ and $y(0) = \sqrt{7}$, then $y(256) =$ [JEE(Advanced) 2017, Paper-2, (3, -1)/61]

यदि $y = y(x)$ अवकलनीय समीकरण (differential equation) $8\sqrt{x}(\sqrt{9+\sqrt{x}})dy = \left(\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}\right)^{-1} dx$, $x > 0$ को सन्तुष्ट करता है एवम् $y(0) = \sqrt{7}$ है, तब $y(256) =$

(A) 16 (B*) 3 (C) 9 (D) 80

Ans. (B)

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{4+\sqrt{9+x}}\right)^{-1}}{8\sqrt{x}\sqrt{9+\sqrt{x}}}$

$$dy = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{8\sqrt{x}} dx$$

Let माना $4 + \sqrt{9+\sqrt{x}} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{9+\sqrt{x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$

$$\int dy = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$y = \sqrt{t} + c$$

$$y = \sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}} + c$$

at $x = 0$ पर, $y = \sqrt{7}$

$$\Rightarrow \sqrt{7} = \sqrt{7} + c \Rightarrow c = 0$$

$$y = \sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}$$

at $x = 256$ पर $\Rightarrow y = \sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{256}}} = 3$

13. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be two non-constant differentiable functions. If $f'(x) = (e^{f(x)-g(x)}) g'(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$, and $f(1) = g(2) = 1$, then which of the following statement(s) is (are) TRUE?

माना कि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ और $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ दो चर (non-constant) और अवकलनीय (differentiable) फलन (function) है। यदि $f'(x) = (e^{f(x)-g(x)}) g'(x)$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए और $f(1) = g(2) = 1$ तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) कथन सत्य है(हैं) ? [JEE(Advanced) 2018, Paper-1, (4, -2)/60]

[Differential equation]

(A) $f(2) < 1 - \log_e 2$

(B) $f(2) > 1 - \log_e 2$

(C) $g(1) > 1 - \log_e 2$

(D) $g(1) < 1 - \log_e 2$

Ans. (BC)

Sol. $f'(x) = e^{f(x)-g(x)} g'(x) : f(1) = g(2) = 1$





$$e^{-f(x)} = e^{-g(x)} + c$$

$$e^{-f(x)} \cdot f'(x) = e^{-g(x)} \cdot g'(x)$$

$$\int d(e^{-f(x)}) = \int d(e^{-g(x)})$$

$$e^{-f(x)} = e^{-g(x)} + c$$

$$x = 1 \quad \frac{1}{e} = e^{-g(1)} + c$$

$$x = 2 \quad e^{-f(2)} = \frac{1}{e} + c$$

$$\therefore g(1) > 1 - \ln 2$$

$$e^{-f(2)} = 2e^{-1} - e^{-g(1)}$$

$$e^{-f(2)} = 2e^{-1} - e^{-g(1)}$$

$$f(2) > 1 - \ln 2$$

$$e^{-1} - e^{-f(2)} = e^{-g(1)} - e^{-1} \Rightarrow e^{-g(1)} + e^{-f(2)} = 2e^{-1}$$

$$e^{-g(1)} < 2e^{-1}$$

$$-g(1) < \ln 2 - 1$$

14*. Let $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function such that $f(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$

for all $x \in [0, \infty)$. Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE?

(A) The curve $y = f(x)$ passes through the point (1, 2)

[Differential equation]

(B) The curve $y = f(x)$ passes through the point (2, -1) [JEE(Advanced) 2018, Paper-1, (4, -2)/60]

(C) The area of the region $\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ is $\frac{\pi-2}{4}$

(D) The area of the region $\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ is $\frac{\pi-1}{4}$

माना कि $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा संतत फलन (continuous function) है कि

$$f(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

सभी $x \in [0, \infty)$ के लिए, तब निम्नलिखित में से कौनसा (से) कथन सत्य है(हैं) ?

(A) वक्र (curve) $y = f(x)$ बिन्दु (1, 2) से गुजरता है।

(B) वक्र (curve) $y = f(x)$ बिन्दु (2, -1) से गुजरता है।

(C) क्षेत्र (region) $\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ का क्षेत्रफल (area) $\frac{\pi-2}{4}$ है।

(D) क्षेत्र (region) $\{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ का क्षेत्रफल (area) $\frac{\pi-1}{4}$ है।





Ans. (BC)

Sol. $f(x) = 1 - 2x + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt \Rightarrow f(x) \cdot e^{-x} = (1 - 2x) \cdot e^{-x} + \int_0^x e^{-t} f(t) dt$

$$\Rightarrow f'(x)e^{-x} - e^{-x} \cdot f(x) = -2 \cdot e^{-x} - (1 - 2x) \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) - 2f(x) = (2x - 3)$$

$$\text{I.F.} = e^{-2x}$$

$$\therefore y \cdot e^{-2x} = \int (2x - 3) \cdot e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{-2x} = (2x - 3) \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} - 2 \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx \Rightarrow y \cdot e^{-2x} = -\frac{(2x - 3)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} + c$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{-2x} = \frac{-(2x - 3) - 1}{2} + c \cdot e^{2x} \Rightarrow y = (1 - x) + c \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow y = (1 - x) + c \cdot e^{2x}$$

put $x = 0$ रखने पर

$$1 = 1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\therefore y = 1 - x \text{ which passes through point } (2, -1)$$

$$\therefore y = 1 - x, \text{ बिन्दु } (2, -1) \text{ से गुजरती है।}$$

15*. Let $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ be a twice differentiable function such that $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(x)\sin t - f(t)\sin x}{t - x} = \sin^2 x$ for all

$x \in (0, \pi)$. If $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}$, then which of the following statement(s) is (are) TRUE ?

(A) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(B) $f(x) < \frac{x^4}{6} - x^2$ for all $x \in (0, \pi)$

(C) There exists $\alpha \in (0, \pi)$ such that $f'(\alpha) = 0$ (D) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ [Differential equation]

[JEE(Advanced) 2018, Paper-2, (4, -2)/60]

माना कि $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा द्विअवकलनीय (twice differentiable) फलन (function) है कि

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(x)\sin t - f(t)\sin x}{t - x} = \sin^2 x \text{ सभी } x \in (0, \pi) \text{ के लिये।}$$

यदि $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12}$, तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (हैं) ?

(A) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$



(B) $f(x) < \frac{x^4}{6} - x^2$ सभी $x \in (0, \pi)$ के लिये

(C) एक ऐसे $\alpha \in (0, \pi)$ का अस्तित्व (existence) है जिसके लिये $f'(\alpha) = 0$

(D) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Ans. (BCD)

Sol. $\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(x)\sin t - f(t)\sin x}{t - x} = \sin^2 x$

$$\frac{f(x)\cos x - f'(x)\sin x}{\sin^2 x} = 1$$

$$-d\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right) = 1$$

$$\frac{f(x)}{\sin x} = -x + c \quad \therefore \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{12} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = -x \sin x$$

(A) $f(x) + f''(x) = -2 \cos x$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

(B) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$

(C) $f(x)$ is continuous and differentiable and $f(0) = f(x) = 0$

$f(x)$ सतत् और अवकलनीय है तथा $f(0) = f(x) = 0$

Using by Rolle's theorem $f'(c) = 0$ for some $x \in (0, \pi)$

रोल प्रमेय से $f'(c) = 0$ किसी $x \in (0, \pi)$ के लिए

(D) $g(x) = -x \sin x + x^2 - \frac{x^4}{6}$

$$g'(x) = f'(x) + 2x - \frac{2x^3}{3}$$

$$g''(x) = f''(x) + 2x - 2x^2$$

$$g'''(x) = 3 \sin x + x \cos x - 4x = 3(\sin x - x) + x(\cos x - 1)$$





$$\Rightarrow g'''(x) < 0 \Rightarrow g''(x) \text{ is decreasing} \Rightarrow g''(x) \text{ ह्रसमान है।}$$

$$\text{for } x > 0 \text{ के लिए } g''(x) < g''(0) \Rightarrow g''(x) < 0$$

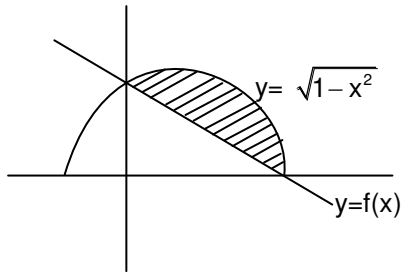
$$\text{hence } g'(x) \text{ is decreasing} \quad \text{अतः } g'(x) \text{ ह्रसमान है।}$$

$$\text{for } x > 0 \text{ के लिए } g'(x) < g'(0) \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\text{hence अतः } g(x) < 0$$

$$\text{for } x > 0 \text{ के लिए } g(x) < g(0) \Rightarrow g(x) < 0$$

$$\text{Hence अतः } f(x) < \frac{x^4}{6} - x^2 \quad \forall x \in (0, \pi)$$



Now अब

$$\text{required area अभीष्ट क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (1)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

16. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function with $f(0) = 0$. If $y = f(x)$ satisfies the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = (2 + 5y)(5y - 2),$$

then the value of $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ is _____.

[JEE(Advanced) 2018, Paper-2, (3, 0)/60]

[Differential equation]

माना कि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा अवकलनीय फलन (differentiable function) है जिसके लिये $f(0) = 0$ । यदि $y = f(x)$, अवकल समीकरण (differential equation)

$$\frac{dy}{dx} = (2 + 5y)(5y - 2),$$

को संतुष्ट करता है, तब $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ का मान है _____।



Ans. (0.4)

Sol. $\frac{dy}{dx} = (5y + 2)(5y - 2)$

$$\frac{1}{25} \int \frac{dy}{\left(y + \frac{2}{5}\right)\left(y - \frac{2}{5}\right)} = \int dx$$

$$\frac{1}{25} \cdot \frac{5}{4} \ln \left| \frac{y - \frac{2}{5}}{y + \frac{2}{5}} \right| = x + c$$

$$\frac{1}{20} \ln \left| \frac{5y - 2}{5y + 2} \right| = x + c$$

at $x = 0$ पर, $y = 0 \Rightarrow c = 0$

Hence अतः $\frac{2 - 5y}{2 + 5y} = e^{20x}$

$$\frac{2 - 5y}{2 + 5y} = e^{20x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{20x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{2}{5} = 0.4$$

17. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable function with $f(0) = 1$ and satisfying the equation

$$f(x + y) = f(x) f'(y) + f'(x) f(y) \text{ for all } x, y \in \mathbb{R}.$$

Then, the value of $\log_e(f(4))$ is _____.

[JEE(Advanced) 2018, Paper-2, (3, 0)/60]

[Differential equation]

माना कि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक ऐसा अवकलनीय फलन (differentiable function) है जिसके लिये $f(0) = 1$ और जो सभी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए समीकरण $f(x + y) = f(x) f'(y) + f'(x) f(y)$ को संतुष्ट करता है। तब $\log_e(f(4))$ का मान है _____।

Ans. (2)

Sol. $f(x + y) = f(x) \cdot f'(y) + f'(x) \cdot f(y)$

substituting $x = y = 0$ रखने पर, we get

$$f(0) = 2f'(0) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

Now substituting अब $y = 0$ रखने पर

$$f(x) = f(x) \cdot f'(0) + f'(x) \cdot f(0)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{f(x)}{2}$$



$$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{x/2} \Rightarrow f(x) = e^{x/2} \text{ (as चूंकि } f(0) = 1)$$

$$\text{Now अब } \ln(f(x)) = \frac{x}{2} \Rightarrow \ln(f(4)) = 2$$

- 18*. Let Γ denote a curve $y = f(x)$ which is in the first quadrant and let the point $(1, 0)$ lie on it. Let the tangent to Γ at a point P intersect the y -axis at Y_P . If PY_P has length 1 for each point P on Γ . Then which of the following options is/are correct? [Differential equation] [T] {[DE-VS]-T-305}

[JEE(Advanced) 2019, Paper-1, (4, -1)/62]

माना कि Γ एक वक्र $y = f(x)$ है जो प्रथम चतुर्थांश (first quadrant) में है और माना कि बिन्दु $(1, 0)$ उस पर स्थित है। माना कि Γ के बिन्दु P पर खींची गयी स्पर्श रेखा (tangent) y -अक्ष को Y_P पर प्रतिच्छेद (intersect) करती है। यदि Γ के प्रत्येक बिन्दु P के लिए PY_P की लम्बाई 1 है, तब निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है (हैं) ?

$$(A) y = -\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}$$

$$(B) xy' + \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$(C) xy' - \sqrt{1-x^2} = 0$$

$$(D) y = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$$

Ans. (BD)

Sol. (a, $f(a)$) $\equiv$ r

$f'(x)$ be differentiation of $f(x)$ equation of tangent

$f'(x)$, $f(x)$ का अवकल है। स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$(y - f(a)) = f'(a)(x - a)$$

put $x = 0$ रखने पर

$$y - f(a) = -af'(a)$$

$$y = f(a) - af'(a)$$

$$y_P = (0, f(a) - af'(a))$$



$$py_p = \sqrt{a^2 + (af'(a))^2} = 1$$

$$a^2 + a^2 (f'(a))^2 = 1$$

$$(f'(a))^2 = \frac{1-a^2}{a^2}$$

$$\int (f'(x)) = \pm \int \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$$

put $\sqrt{1-x^2} = t$ रखने पर

$$\Rightarrow y = \pm \int \frac{-t^2 dt}{1-t^2} = \pm \left(t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) + c = \pm \left(t - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+t)^2}{1-t^2} \right) + c = \pm \left(\sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) + c$$

$\Rightarrow$ Put $x = 1$ and और $y = 0$ रखने पर $\Rightarrow c = 0$

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षों) के प्रश्न

1. Solution of the differential equation $\cos x \, dy = y(\sin x - y) \, dx$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ is [AIEEE 2010 (4, -1), 144]

अवकल समीकरण $\cos x \, dy = y(\sin x - y) \, dx$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ का हल है—

Ans.

(1) $y \sec x = \tan x + c$ (2) $y \tan x = \sec x + c$ (3) $\tan x = (\sec x + c)y$ (4*) $\sec x = (\tan x + c)y$

Sol.

$$\cos x \, dy - y \sin x \, dx = -y^2 \, dx$$

$$\cos x \, dy + y \, d(\cos x) = -y^2 \, dx$$

$$\frac{d(y \cos x)}{y^2 \cos^2 x} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$-\frac{1}{y \cos x} = -\tan x + c$$

$$-\sec x = y(-\tan x + c)$$

$$\sec x = y(\tan x + k)$$

Hence correct option is (4)

अतः सही विकल्प (4) है।

2. Let I be the purchase value of an equipment and $V(t)$ be the value after it has been used for t years. The value $V(t)$ depreciates at a rate given by differential equation $\frac{dV(t)}{dt} = -k(T - t)$, where $k > 0$ is a constant and T is the total life in years of the equipment. Then the scrap value $V(T)$ of the equipment is :

[AIEEE 2011, I, (4, -1), 120]





यदि किसी उपकरण का क्रय मूल्य I है तथा t वर्ष के उपयोग के पश्चात उसका मूल्य $V(t)$ है, तो $V(t)$ के अवमूल्यन की दर अवकल समीकरण $\frac{dV(t)}{dt} = -k(T-t)$ द्वारा प्रदत्त है, जहाँ $k > 0$ एक अचर है तथा उपकरण का कुल जीवन काल T वर्ष है। तो $V(T)$ के कबाड़ (scrap) का मूल्य है : [AIEEE 2011, I, (4, -1), 120]

- (1) $T^2 - \frac{1}{k}$ (2*) $I - \frac{kT^2}{2}$ (3) $I - \frac{k(T-t)^2}{2}$ (4) e^{-kT}

Sol.

(2)

$$\frac{dv(t)}{dt} = k(T-t)$$

$$\int dv(t) = \int (-kT)dt + \int ktdt$$

$$V(t) = -kTt + k \frac{t^2}{2} + c$$

$$\text{at } t = 0 \quad C = I$$

$$V(T) = -kTt + \frac{kt^2}{2} + I$$

$$\text{Now at } t = T$$

$$V(T) = -kT^2 + k \frac{T^2}{2} + I$$

$$V(T) = I - \frac{1}{2} kT^2 \quad \text{Ans.}$$

3. If $\frac{dy}{dx} = y + 3 > 0$ and $y(0) = 2$, then $y(\ln 2)$ is equal to : [AIEEE 2011, I, (4, -1), 120]

यदि $\frac{dy}{dx} = y + 3 > 0$ तथा $y(0) = 2$ है, तो $y(\ln 2)$ बराबर है : [AIEEE 2011, I, (4, -1), 120]

- (1*) 7 (2) 5 (3) 13 (4) -2

Sol.

(1)

$$\frac{dy}{dx} = y + 3$$

$$\frac{dy}{y+3} = dx$$

$$\ln(y+3) = x + c$$

$$\text{given at } x = 0, y = 2$$

$$x = 0 \text{ पर } y = 2 \text{ दिया है}$$

$$\ln 5 = c$$

$$\therefore \ln(y+3) = x + \ln 5$$

$$\ln \left(\frac{y+3}{5} \right) = x$$

$$y+3 = 5e^x$$

$$y = 5e^x - 3$$

$$\therefore y(\ln 2) = 5e^{\ln 2} - 3 = 7 \quad \text{Ans.}$$

4. The curve that passes through the point (2, 3), and has the property that the segment of any tangent to it lying between the coordinate axes is bisected by the point of contact is given by : [AIEEE 2011, II, (4, -1), 120]

वह वक्र, जो बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है तथा जिसका गुणधर्म है, उस पर खींची गयी स्पर्श रेखा का यह खंड जो निर्देशांक अक्षों के बीच स्थित है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होता है, का समीकरण है : [AIEEE 2011, II, (4, -1), 120]





(1) $2y - 3x = 0$

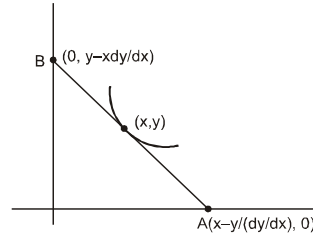
(2*) $y = \frac{6}{x}$

(3) $x^2 + y^2 = 13$

(4) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 2$

Sol. (2)

$$Y - y = \frac{dy}{dx} (X - x)$$

X-intercept is अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(x - \frac{y}{dy/dx}, 0\right)$ Y- intercept is अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(0, y - \frac{xdy}{dx}\right)$

According to statment कथनानुसार

$$x - \frac{y}{dy/dx} = 2x \text{ and तथा } y - \frac{xdy}{dx} = 2y$$

$$\frac{-y}{\frac{dy}{dx}} = x$$

$$\frac{-xdy}{dx} = y$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\ell n y = -\ell n x + \ell n c$$

$$y = \frac{c}{x} \Rightarrow c = 6$$

$$\text{Hence अतः } y = \frac{6}{x}$$

5. Consider the differential equation $y^2 dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0$. If $y(1) = 1$, then x is given by :

[AIEEE 2011, II, (4, -1), 120] (Revision Planner)अवकल समीकरण $y^2 dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0$ पर विचार कीजिए। यदि $y(1) = 1$ है, तो x का मान है :

(1) $4 - \frac{2}{y} - \frac{e^y}{e}$

(2) $3 - \frac{1}{y} + \frac{e^y}{e}$

(3*) $1 + \frac{1}{y} - \frac{e^y}{e}$

(4) $1 - \frac{1}{y} + \frac{e^y}{e}$

Sol. (3)

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y^3}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{y^2} dy} = e^{-\frac{1}{y}}$$

$$\text{so अतः } x \cdot e^{-\frac{1}{y}} = \int \frac{1}{y^3} e^{-\frac{1}{y}} dy$$

$$\text{Let माना } \frac{-1}{y} = t$$



$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = dt$$

$$\Rightarrow I = - \int te^t dt = e^t - te^t = e^{-\frac{1}{y}} + \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} + c$$

$$\Rightarrow xe^{-\frac{1}{y}} = e^{-\frac{1}{y}} + \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} + c$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y} + c \cdot e^{1/y}$$

since चूंकि $y(1) = 1$

$$\therefore c = -\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{e} \cdot e^{1/y}$$

6. The population $p(t)$ at time t of a certain mouse species satisfies the differential equation [AIEEE-2012, (4, -1)/120]

$$\frac{dp(t)}{dt} = 0.5 p(t) - 450. \text{ If } p(0) = 850, \text{ then the time at which the population becomes zero is :}$$

चूँ की एक प्रजाति की किसी समय t पर जनसंख्या $p(t)$ अवकल समीकरण $\frac{dp(t)}{dt} = 0.5 p(t) - 450$ को संतुष्ट करती है। यदि $p(0) = 850$ है, तो वह समय जब यह शून्य हो गई है—

(1*) $2 \ln 18$

(2) $\ln 9$

(3) $\frac{1}{2} \ln 18$

(4) $\ln 18$

Sol. Ans. (1)

$$2 \frac{dp(t)}{900 - p(t)} = - dt$$

$$-2 \ln(900 - p(t)) = -t + c$$

when $t = 0, p(0) = 850$

$$-2 \ln(50) = c$$

$$\therefore 2 \ln \left(\frac{50}{900 - p(t)} \right) = -t$$

$$900 - p(t) = 50 e^{t/2}$$

$$p(t) = 900 - 50 e^{t/2}$$

let $p(t_1) = 0$

$$0 = 900 - 50 e^{\frac{t_1}{2}}$$

$$\therefore t_1 = 2 \ln 18$$

7. At present, a firm is manufacturing 2000 items. It is estimated that the rate of change of production P w.r.t. additional number of workers x is given by $\frac{dP}{dx} = 100 - 12\sqrt{x}$. If the firm employs 25 more workers, then the new level of production of items is (Revision Planner) [AIEEE - 2013, (4, -1), 360]

वर्तमान में एक फर्म 2000 नग बना रही है। यह अनुमान लगाया गया है कि अतिरिक्त कामगारों की संख्या x के सापेक्ष उत्पादन P के परिवर्तन की दर $\frac{dP}{dx} = 100 - 12\sqrt{x}$ द्वारा प्रदत्त है। यदि फर्म 25 कामगार अधिक लगाती है, तो नगों के उत्पादन का नया स्तर है—

[AIEEE - 2013, (4, -1), 360]

(1) 2500

(2) 3000

(3*) 3500

(4) 4500

**Sol. (3)**

$$dP = (100 - 12\sqrt{x}) dx$$

By integrating

$$\int dP = \int (100 - 12\sqrt{x}) dx$$

$$P = 100x - 8x^{3/2} + C$$

When $x = 0$ then $P = 2000$

$$\Rightarrow C = 2000$$

Now when $x = 25$ then P is

$$P = 100 \times 25 - 8 \times (25)^{3/2} + 2000$$

$$= 2500 - 8 \times 125 + 2000$$

$$= 4500 - 1000$$

$$\Rightarrow P = 3500$$

Hindi. (3)

$$dP = (100 - 12\sqrt{x}) dx$$

समाकलन करने पर

$$\int dP = \int (100 - 12\sqrt{x}) dx$$

$$P = 100x - 8x^{3/2} + C$$

जब $x = 0$ तब $P = 2000$

$$\Rightarrow C = 2000$$

अब जब $x = 25$ तब P है

$$P = 100 \times 25 - 8 \times (25)^{3/2} + 2000$$

$$= 2500 - 8 \times 125 + 2000$$

$$= 4500 - 1000$$

$$\Rightarrow P = 3500$$

8. Let the population of rabbits surviving at a time t be governed by the differential equation $\frac{dp(t)}{dt} = \frac{1}{2} p(t) - 200$. If $p(0) = 100$, then $p(t)$ equals : **[Differential Equation] [JEE(Main) 2014, (4, - 1), 120]**

माना किसी समय t पर जीवित खरगोशों की जनसंख्या अवकल समीकरण $\frac{dp(t)}{dt} = \frac{1}{2} p(t) - 200$ द्वारा नियंत्रित है।

यदि $p(0) = 100$ है, तो $p(t)$ बराबर है : **[Differential Equation] [JEE(Main) 2014, (4, - 1), 120]**

- (1) $600 - 500 e^{t/2}$ (2) $400 - 300 e^{-t/2}$ (3*) $400 - 300 e^{t/2}$ (4) $300 - 200 e^{-t/2}$

Sol. Ans. (3)

$$p'(t) = \frac{1}{2} p(t) - 200$$

$$p'(t) - \frac{1}{2} p(t) = -200$$

$$I. F = e^{-\frac{1}{2}t}$$

Hence solutions is अतः हल है

$$p(t) e^{-\frac{1}{2}t} = \int -200 e^{-t/2} dt = 400 e^{-\frac{1}{2}t} + C$$

or या $p(t) = 400 + C e^{t/2}$ चूँकि Since $p(0) = 100$

$$\Rightarrow 100 = 400 + C \Rightarrow C = -300$$

Thus अतः $p(t) = 400 - 300 e^{t/2}$.



9. Let $y(x)$ be the solution of the differential equation $(x \log x) \frac{dy}{dx} + y = 2x \log x$, $(x \geq 1)$. Then $y(e)$ is equal to

(1) e

(2) 0

(3) 2

[JEE(Main) 2015, (4, - 1), 120]

(4) $2e$

[Differential equation]

माना अवकल समीकरण $(x \log x) \frac{dy}{dx} + y = 2x \log x$, $(x \geq 1)$ का हल $y(x)$ है, तो $y(e)$ बराबर है—

(1) e

(2) 0

(3) 2

[JEE(Main) 2015, (4, - 1), 120]

(4) $2e$

Ans.

(3)

Sol.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = 2 \quad \text{at } x = 1 ; y = 0$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\log(\log x)} = \log x$$

$$y(\log x) = \int 2(\log x) dx$$

$$y(\log x) = 2[x \log x - x] + c$$

$$\text{at } x = 1, \quad c = 2$$

$$x = e$$

$$y = 2(e - e) + 2$$

$$y = 2$$

$$\log \left| \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \right) x^2 \right| = 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \frac{y}{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) + k$$

$$\log |x^2 + xy + y^2| = 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left(\frac{2y + x}{\sqrt{3}x} \right) + k$$

या

वक्रों के निकाय का समीकरण है $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

h और k प्राचल है।

x के सापेक्ष अवकलन पर

$$2(x-h) + 2(y-k) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x-h) + (y-k) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

पुनः अवकलन करने पर

$$1 + (y-k) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$$y-k = - \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \right) \quad \dots\dots(3)$$

$(y-k)$ का मान रखने पर

$$(x-h) = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$



$(y - k)$ और $(x - h)$ का मान रखने पर

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(d^2y/dx^2\right)^2} + \left(\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)^2 = r^2$$

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 = r^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

अभीष्ट अवकल समीकरण है।

10. If a curve $y = f(x)$ passes through the point $(1, -1)$ and satisfies the differential equation, $y(1 + xy) dx = xdy$, then $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ is equal to **[JEE(Main) 2016, (4, -1), 120]**

यदि एक वक्र $y = f(x)$ बिन्दु $(1, -1)$ से होकर जाता है तथा अवकल समीकरण $y(1 + xy) dx = xdy$ को संतुष्ट करता है, तो $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ बराबर है—

- (1) $-\frac{4}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) $-\frac{2}{5}$

Ans.

(3)

Sol.

$$y(1 + xy) dx = xdy$$

$$ydx - xdy + xy^2dx = 0$$

$$y^2d\left(\frac{x}{y}\right) + xy^2dx = 0$$

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C \quad \dots(i)$$

$(1, -1)$ satisfies (संतुष्ट करता है)

$$-1 + \frac{1}{2} = C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Put in (i) $x =$

$$(i) \text{ में रखने पर } x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{y} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2y} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2y} = \frac{5}{8}$$

$$y = \frac{4}{5}$$

11. If $(2 + \sin x) \frac{dy}{dx} + (y + 1) \cos x = 0$ and $y(0) = 1$, then $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ is equal to :

[JEE(Main) 2017, (4, -1), 120]

यदि $(2 + \sin x) \frac{dy}{dx} + (y + 1) \cos x = 0$ तथा $y(0) = 1$ है, तो $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ बराबर है :

[JEE(Main) 2017, (4, -1), 120]

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) $-\frac{1}{3}$ (4) $\frac{4}{3}$

Ans.

(1)

Sol.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(y+1)\cos x}{2+\sin x}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = -\int \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$$





$$\ln(y+1) = -\ln(2+\sin x) + c$$

$$(y+1)(2+\sin x) = A; \text{ for } x=0, \text{ के लिए } y=1 \Rightarrow A=4$$

$$\therefore (y+1)(2+\sin x) = 4$$

$$\text{for } x = \frac{\pi}{2} \text{ के लिए } \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

12. Let $y = y(x)$ be the solution of the differential equation

$$\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = 4x, x \in (0, \pi). \text{ If } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ then } y\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ is equal to } \quad [\text{JEE(Main)} \quad 2018, (4, -1),$$

120] **Deff. Equa**

माना अवकल समीकरण $\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = 4x, x \in (0, \pi)$ का $y = y(x)$ एक हल है। यदि $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ है, तो $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$ बराबर है :

$$(1^*) -\frac{8}{9}\pi^2$$

$$(2) -\frac{4}{9}\pi^2$$

$$(3) \frac{4}{9\sqrt{3}}\pi^2$$

$$(4) \frac{-8}{9\sqrt{3}}\pi^2$$

Sol. (1)

$$\frac{dy}{dx} + \cot x y = 4x \operatorname{cosec} x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \cot x dx} = \sin x$$

$$y (\sin x) = \int 4x \operatorname{cosec} x \cdot \sin x dx + C$$

$$y \sin x = 2x^2 + C$$

$$\therefore y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$C = \frac{-\pi^2}{2}$$

$$y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$$

$$\text{so (इसलिए)} y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{2\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{2}\right) = 2\pi^2\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{8\pi^2}{9}$$

13. Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be such that $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, for all $x, y \in [0, 1]$, and $f(0) \neq 0$. If $y = y(x)$ satisfies the differential equation, $\frac{dy}{dx} = f(x)$ with $y(0) = 1$, then $y\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{3}{4}\right)$ is equal to :

[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19), P-2 (4, -1), 120]

माना $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार है कि सभी $x, y \in [0, 1]$ के लिए $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ है तथा $f(0) \neq 0$ है। यदि $y = y(x)$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x)$ को संतुष्ट करता है और $y(0) = 1$ है, तो $y\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{3}{4}\right)$ बराबर है—



(1) 5

(2) 2

(3) 3

(4) 4

Differential equation XII M

Ans. (3)**Sol.** $f(xy) = f(x).f(y) \forall x, y \in [0, 1]$ put $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ Now put $y = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) = 1 \forall x \in [0, 1]$ Now $\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y = x + c$ as $y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ so $y = x + 1$

Hence $y\left(\frac{3}{4}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + 1\right) = 3$

Hindi. $f(xy) = f(x).f(y) \forall x, y \in [0, 1]$ $x = y = 0$ रखने पर $\Rightarrow f(0) = 1$ अब $y = 0$ रखने पर $\Rightarrow f(x) = f(0) = 1 \forall x \in [0, 1]$ अब $\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y = x + c$ as $y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$ इसलिए $y = x + 1$

अब $y\left(\frac{3}{4}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + 1\right) = 3$

14. The curve amongst the family of curves represented by the differential equation, $(x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$ which passes through $(1, 1)$, is :

- (1) a circle with centre on the x-axis.
- (2) a hyperbola with transverse axis along the x-axis
- (3) an ellipse with major axis along the y-axis.
- (4) a circle with centre on the y-axis

अवकल समीकरण $(x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$ द्वारा निरूपित वक्रों के कुल (family) का वह वक्र जो $(1, 1)$ से होकर जाता है, है:

- (1) एक वृत्त जिसका केंद्र x-अक्ष पर है।
- (2) एक अतिपरवलय जिसका अनुप्रस्थ x-अक्ष की दिशा में है।
- (3) एक दीर्घवृत्त जिसका दीर्घ अक्ष y- अक्ष की दिशा में है।
- (4) एक वृत्त जिसका केंद्र y-अक्ष पर है।

[JEE(Main) 2019, Online (10-01-19), P-2 (4, - 1), 120]**Ans. (1)****Sol.** $x^2 dx - y^2 dx + 2xy dy = 0$

$$x^2 dx = y^2 dx - 2x y dy$$

$$\Rightarrow -dx = d\left(\frac{y^2}{x}\right)$$



$$\Rightarrow -x = \frac{y^2}{x} + C$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + Cx = 0$$

$\therefore$ It passes through (1,1) hence $C = -2$

$\therefore$ यह बिन्दु (1,1) से गुजरता है तब $C = -2$, होगा

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

15. If $y(x)$ is the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$, $x > 0$, where $y(1) = \frac{1}{2}e^{-2}$, then

(1) $y(\log_e 2) = \log_e 4$

(2) $y(\log_e 2) = \frac{\log_e 2}{4}$

(3) $y(x)$ is decreasing in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(4) $y(x)$ is decreasing in $(0, 1)$

यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$, $x > 0$ का हल $y(x)$ है, जहाँ $y(1) = \frac{1}{2}e^{-2}$, तो :

(1) $y(\log_e 2) = \log_e 4$

(2) $y(\log_e 2) = \frac{\log_e 2}{4}$

(3) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ में $y(x)$ ह्रासमान है।

(4) $(0, 1)$ में $y(x)$ ह्रासमान है।

[JEE(Main) 2019, Online (11-01-19), P-1 (4, - 1), 120]

Ans. (3)

Sol. $\frac{dy}{dx} + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y = e^{-2x}$

$$\text{I.F.} = e^{\int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx} = e^{2x + \ln(x)} = xe^{2x}$$

solution is हल $y(xe^{2x}) = \frac{x^2}{2} + C$, $y(1) = \frac{1}{2e^2}$, $\frac{1}{2e^2} \times 1e^2 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = 0$

hence अतः $y = \frac{xe^{-2x}}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{x^2 e^{-2x}(-2)}{2} = e^{-2x} \left[\frac{1}{2} - x \right] < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

hence $y(x)$ is decreasing is $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



अतः $y(x)$ ह्यासमान फलन $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

16. Consider the differential equation, $y^2 dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0$. If value of y is 1 when $x = 1$, then the value of x for which $y = 2$, is :

अवकल समीकरण $y^2 dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0$ पर विचार कीजिए। यदि $x = 1$ पर y का मान 1 है, तो x का मान, जिसके लिए $y = 2$ है, है—

- (1) $\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ (2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}}$ (3) $\frac{3}{2} - \sqrt{e}$ (4) $\frac{5}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}}$

Ans. (1) [JEE(Main) 2019, Online (12-04-19), P-1 (4, -1), 120] [Differential Equation]

Sol. $y^2 dx + \left(x - \frac{1}{y}\right) dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y^2} = \frac{1}{y^3}$

Integrating factor (I.F.) = $e^{-\frac{1}{y}}$

Now $x \cdot e^{-\frac{1}{y}} = \int e^{-\frac{1}{y}} \frac{1}{y^3} dy$ Put $-\frac{1}{y} = t$

$x \cdot e^t = \int e^t (-t) dt$

$\Rightarrow x \cdot e^t = -(t \cdot e^t - e^t) + c \Rightarrow x \cdot e^{-\frac{1}{y}} = e^{-\frac{1}{y}} \left(1 + \frac{1}{y}\right) + c \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y} + c \cdot e^{\frac{1}{y}}$

it passes through point (1, 1)

$\therefore c = -\frac{1}{e}$

Equation of curve is

$x = 1 + \frac{1}{y} - e^{\frac{1}{y}-1}$

it passes through (k, 2)

$\therefore k = 1 + \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}}$

17. If $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = 6x$, ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) and $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, then $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$ is equal to :



यदि $\cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = 6x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ तथा $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ है, तो $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$ बराबर है—

(1) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

(2) $-\frac{\pi^2}{2}$

(3) $-\frac{\pi^2}{4\sqrt{3}}$

(4) $-\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

Ans. (4) [JEE(Main) 2019, Online (09-04-19), P-2 (4, -1), 120] [Differential Equation]

Sol. $\frac{dy}{dx} - y \tan x = 6x \sec x$,

Linear Diffraction equation in 'y'

$$\text{I.F.} = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln(\sec x)} = \cos x$$

$$y (\text{I.F.}) = \int Q.(\text{I.F.}) dx$$

$$y (\cos x) = \int 6x dx$$

$$y \cdot \cos x = 3x^2 + c \quad \because y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$0 = 3 \left(\frac{\pi^2}{9} \right) + c \quad \therefore c = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$y \cos x = 3x^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

$$\text{when } x = \frac{\pi}{6}$$

$$y \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{\pi^2}{36} - \frac{\pi^2}{3}$$

$$y \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\pi^2}{4}$$

$$y = \frac{-\pi^2}{2\sqrt{3}}$$

18. The general solution of the differential equation $(y^2 - x^3) dx - xy dy = 0$ ($x \neq 0$) is :

(where c is a constant of integration)

अवकल समीकरण $(y^2 - x^3) dx - xy dy = 0$ ($x \neq 0$) का व्यापक हल है :

(जहाँ c एक समाकलन अचर है)

(1) $y^2 + 2x^2 + cx^3 = 0$

(2) $y^2 - 2x^2 + cx^3 = 0$

(3) $y^2 - 2x^3 + cx^2 = 0$

(4) $y^2 + 2x^3 + cx^2 = 0$





Ans. (4) [JEE(Main) 2019, Online (12-04-19), P-2 (4, -1), 120] [Differential Equation]

Sol. $(y^2 - x^3)dx - xydy = 0 \Rightarrow y(ydx - xdy) = x^3dx \Rightarrow \frac{y}{x} \left(\frac{ydx - xdy}{x^2} \right) = dx$

$$\Rightarrow -\frac{y}{x} d\left(\frac{y}{x}\right) = dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = x + k \Rightarrow -y^2 = 2x^3 + 2x^2k \Rightarrow y^2 + 2x^3 + cx^2 = 0$$

19. Let $y = f(x)$ is the solution of the differential equation $e^y \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = e^x$ such that $y(0) = 0$, then $y(1)$ is equal to: **[JEE(Main) 2020, Online (07-01-20), P-1 (4, -1), 120]**

यदि अवकलन समीकरण, $e^y \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = e^x$ जबकि $y(0) = 0$, का हल $y = f(x)$ है, तो $y(1)$ बराबर है :

(1) $2e$

(2) $1 + \log_e 2$

(3) $\log_e 2$

(4) $2 + \log_e 2$

Ans. (2)

Sol. $e^y = t$

$$e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} - t = e^x$$

$$IF = e^{\int -1 \cdot dx} = e^{-x}$$

$$t(e^{-x}) = \int e^x \cdot e^{-x} dx$$

$$e^{y-x} = x + c$$

Put $x = 0, y = 0$ रखने पर then $c = 1$

$$e^{y-x} = x + 1$$

$$y = x + \ln(x + 1)$$

at $x = 1$ रखने पर, $y = 1 + \ln(2)$

20. The differential equation of the family of curves, $x^2 = 4b(y + b)$, $b \in \mathbb{R}$, is

वक्रों $x^2 = 4b(y + b)$, $b \in \mathbb{R}$ के कुल का अवकल समीकरण है —

(1) $x(y')^2 = x - 2yy'$

(2) $xy'' = y'$

(3) $x(y')^2 = x + 2yy'$

(4) $x(y')^2 = 2yy' - x$

Ans. (3) [JEE(Main) 2020, Online (08-01-20), P-2 (4, -1), 120]



Resonance
Educating for better tomorrow

Corporate Office: CG Tower, A-46 & 52, IPIA, Near City Mall, Jhalawar Road, Kota (Raj.)-324005
Website : www.resonance.ac.in | E-mail : contact@resonance.ac.in
Toll Free : 1800 258 5555 | CIN: U80302RJ2007PLC024029

ADVDE - 29



Sol. $2x = 4by' \Rightarrow b = \frac{x}{2y'}$

So. differential equation is $x^2 = \frac{2x}{y'} \cdot y + \left(\frac{x}{y'}\right)^2$

अतः अवकल समीकरण $x^2 = \frac{2x}{y'} \cdot y + \left(\frac{x}{y'}\right)^2 \Rightarrow x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y \frac{dy}{dx} + x$

21. If for $x \geq 0$, $y = y(x)$ is the solution of the differential equation,

$(x+1)dy = \{(x+1)^2 + y - 3\}dx$, $y(2) = 0$, then $y(3)$ is equal to :

यदि $x \geq 0$ के लिए $y = y(x)$, अवकल समीकरण

$(x+1)dy = \{(x+1)^2 + y - 3\}dx$, $y(2) = 0$, का हल है, तो $y(3)$ का मान है

Ans. (3)

[JEE(Main) 2020, Online (09-01-20), P-1 (4, 0), 120]

Sol. $\frac{dy}{dx} = (1+x) + \left(\frac{y-3}{1+x}\right)$

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{(1+x)}y = (1+x) - \frac{3}{(1+x)}$

I.F. = $e^{-\int \frac{1}{(1+x)} dx} = \frac{1}{(1+x)} \quad \therefore \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{1+x} \right) = 1 - \frac{3}{(1+x)^2}$

$\frac{y}{1+x} = x + 3(1+x)^{-1} + c$

$y = (1+x) \left[x + \frac{3}{(1+x)} + c \right]$

$\therefore$ at $x = 2$, $y = 0 \therefore 0 = 3(2+1+c) \Rightarrow c = -3 \therefore$ at $x = 3$, $y = 3$



High Level Problems (HLP)

1. Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = (\sin x - \sin y) \frac{\cos x}{\cos y}$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (\sin x - \sin y) \frac{\cos x}{\cos y}$ को हल कीजिए।

Ans. $\sin y = \sin x - 1 + c e^{-\sin x}$

Sol. $\cos y \frac{dy}{dx} = \sin x \cos x - \sin y \cos x$

$$\cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \cdot \sin y = \sin x \cos x$$

let माना $\sin y = t \Rightarrow \cos y = \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$$\frac{dt}{dx} + t \cos x = \sin x \cos x$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \text{solution is हल है } t \cdot e^{\sin x} = \int \sin x (\cos x e^{\sin x}) dx$$

$$\sin y \cdot e^{\sin x} = \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x} + c$$

$$\sin y = \sin x - 1 + c e^{-\sin x}$$

2. Solve : $(1 + xy) y + (1 - xy) x \frac{dy}{dx} = 0$

$(1 + xy) y + (1 - xy) x \frac{dy}{dx} = 0$ को हल कीजिए।

Ans. $\ln \frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = c$

Sol. $ydx + xdy + xy^3 \left[\frac{ydx - xdy}{y^2} \right] = 0$

$$\frac{d(xy)}{x^2 y^2} + \frac{y}{x} d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{xy} + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = c$$

3. Use the substitution $y^2 = a - x$ to reduce the equation $y^3 \frac{dy}{dx} + x + y^2 = 0$ to homogeneous form and hence solve it. (where 'a' is variable)

प्रतिस्थापन $y^2 = a - x$ का उपयोग करके समीकरण $y^3 \frac{dy}{dx} + x + y^2 = 0$ को समघात रूप बनाकर इसे हल कीजिए।
(जहाँ a चर है)

Ans. $\frac{1}{2} \ln |x^2 + a^2| - \tan^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) = c$ where जहाँ, $a = x + y^2$

Sol. $y^2 = a - x$



$$2y = \frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} - 1$$

Now (अब) $\frac{(a-x)}{2} \left(\frac{da}{dx} - 1 \right) + a = 0$

$$\Rightarrow (a-x) \frac{da}{dx} - a + x + 2a = 0$$

$$\Rightarrow ada - xda + xdx + adx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(ada + xdx)}{a^2 + x^2} + \frac{(adx - xda)}{a^2 + x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d(a^2 + x^2)}{a^2 + x^2} - \frac{\left(\frac{xda - adx}{x^2} \right)}{1 + \frac{a^2}{x^2}} = 0$$

On integrating (समाकलन करने पर)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln |x^2 + a^2| - \tan^{-1} \left(\frac{a}{x} \right) = c, \text{ where (जहाँ) } a = x + y^2$$

4. Solve : $\frac{dy}{dx} - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$, y being bounded when $x \rightarrow \infty$.

$\frac{dy}{dx} - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$, जब $x \rightarrow \infty$, y परिबद्ध है, को हल कीजिए।

Ans. $y = 2^{\sin x}$

Sol. $\frac{dy}{dx} - y \ln 2 = 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2$

$$R = e^{-\ln 2 \int dx} \Rightarrow R = e^{-x \ln 2} \Rightarrow R = 2^{-x}$$

$$y 2^{-x} = \int 2^{-x} 2^{\sin x} (\cos x - 1) \ln 2 dx$$

put $\sin x - x = t$ रखने पर $\Rightarrow (\cos x - 1) dx = dt$

and then solve integration तथा समाकलन हल करने पर

5. Solve : $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ given that $y = 0$, when $x = 1$.

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) y = \frac{1}{(1+x^2)^2} \text{ दिया गया है कि जब } x = 1 \text{ तब } y = 0 \text{ को हल कीजिए।}$$

Ans. $y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

Sol. Linear Diff. equation रैखिक अवकल समीकरण

$$R = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \Rightarrow R = 1 + x^2$$

$$\Rightarrow y(1+x^2) \int \frac{1}{1+x^2} = dx$$

$$\Rightarrow y(1+x^2) = \tan^{-1} x + c$$

6. Solve the differential equation, $(x^2 + 4y^2 + 4xy) dy = (2x + 4y + 1) dx$.

अवकल समीकरण $(x^2 + 4y^2 + 4xy) dy = (2x + 4y + 1) dx$ को हल कीजिए।





Ans. $y = \ln\left((x+2y)^2 + 4(x+2y) + 2\right) - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x+2y+2-\sqrt{2}}{x+2y+2+\sqrt{2}}\right) + c$

Sol. $(x+2y)^2 \frac{dy}{dx} = (2(x+2y) + 1) dx$

put $x+2y = t$ रखने पर $\Rightarrow 1 + 2 \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$t^2 \left(\frac{dt}{dx} - 1 \right) = 2(2t+1)$

$t^2 \frac{dt}{dx} = t^2 + 4t + 2$

$\frac{t^2 dt}{t^2 + 4t + 2} = dx$ (variable separable चर पृथक्करण)

7. Solve the following differential equations.

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए –

(i) $3 \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$ (ii) $x^2 y - x^3 \frac{dy}{dx} = y^4 \cos x$

Ans. (i) $y^3 (x+1)^2 = \frac{x^6}{6} + \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{4} x^4 + c$

(ii) $x^3 y^{-3} = 3 \sin x + c$

Sol. (i) $\frac{3dy}{dx} + \frac{2y}{x+1} = \frac{x^3}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{3y^2 dy}{dx} + \frac{2y^3}{x+1} = x^3$

let $y^3 = t$ माना $y^3 = t$

$\Rightarrow \frac{3y^2 dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{2t}{x+1} = x^3$

I.F. = $e^{\int \frac{2}{x+1} dx} = e^{2 \ln(1+x)} = (1+x)^2$ समाकल गुणांक (I.F.) = $e^{\int \frac{2}{x+1} dx} = e^{2 \ln(1+x)} = (1+x)^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} ((x+1)^2 t) = x^3 (x+1)^2$

$\Rightarrow t(x+1)^2 = \int x^3 (x+1)^2 dx = \int x^5 + x^3 + 2x^4 dx = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^5}{5} + c$

(ii) $x^2 y - \frac{x^2 dy}{dx} = y^4 \cos x$

$\Rightarrow \frac{-1}{y^4} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{x^3 y^3} = \frac{\cos x}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{x^3 y^3} = \frac{-\cos x}{x^3}$

put $\frac{-1}{y^3} = t \Rightarrow \frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \frac{dt}{dx} \quad \frac{-1}{y^3} = t$ रखने पर $\frac{1}{y^4} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \frac{dt}{dx} + \frac{t}{x} = \frac{-\cos x}{x^3} \Rightarrow \frac{dt}{dx} + \frac{3t}{x} = \frac{-3 \cos x}{x^3}$





$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{\ln x^3} = x^3 \quad \text{समाकल गुणांक (I.F.)} = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (t x^3) = \frac{-3 \cos x}{x^3} \times x^3 \Rightarrow t x^3 = -3 \int \cos x dx$$

$$\Rightarrow t x^3 = -3 \sin x + c$$

8. Find the integral curve of the differential equation $x(1 - x \ln y) \frac{dy}{dx} + y = 0$ which passes through $(1, 1/e)$.

अवकल समीकरण $x(1 - x \ln y) \frac{dy}{dx} + y = 0$ का समाकल वक्र ज्ञात कीजिए जो $(1, 1/e)$ से गुजरता है।

Ans. $x(e^y + \ln y + 1) = 1$

Sol. $x(1 - x \ln y) \frac{dy}{dx} + y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x \ln y - 1)x} \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x \ln y - 1)x}$$

Let माना $\ln y = t \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(xt - 1)x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = x^2 t - x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{x} = t$$

$$\frac{-1}{x} = P \Rightarrow \frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{dp}{dt} - P = t$$

on solving हल करने पर $x(e^y + \ln y + 1) = 1$

9. Solve the following differential equations.

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए -

(i) $(x^2 + y^2 + a^2) y \frac{dy}{dx} + x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

(ii) $(1 + \tan y) (dx - dy) + 2x dy = 0$

Ans. (i) $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2 (y^2 - x^2) = c$

(ii) $x e^y (\cos y + \sin y) = e^y \sin y + C$

Sol. (i) $(x^2 + y^2 + a^2) y \frac{dy}{dx} + x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$

$$(x^2 + y^2 + a^2) y dy + x(x^2 + y^2 - a^2) dx = 0$$

$$x^2 y dy + x y^2 dx + y^3 dy + a^2 y dy + x^3 dx - a^2 x dx = 0$$

$$d\left(\frac{x^2 y^2}{2}\right) + y^3 dy + a^2 y dy + x^3 dx - a^2 x dx = 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{a^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{a^2 x^2}{2} + c = 0$$

(ii) $(1 + \tan y) (dx - dy) + 2x dy = 0$

$$\Rightarrow (1 + \tan y) \frac{dx}{dy} - (1 + \tan y) + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{2x}{1 + \tan y} - 1 = 0$$



$$\begin{aligned} \text{I.F.} &= e^{\int \frac{2}{1+\tan y} dy} = e^{\int \frac{2\cos y}{\sin y + \cos y} dy} = e^{\int \frac{(\cos x + \sin y) + (\cos y - \sin y)}{\sin y + \cos y} dy} \\ \text{समाकल गुणांक (I.F.)} &= e^{\int \frac{2}{1+\tan y} dy} = e^{\int \frac{2\cos y}{\sin y + \cos y} dy} = e^{\int \frac{(\cos x + \sin y) + (\cos y - \sin y)}{\sin y + \cos y} dy} \\ &= e^{\int 1 + \frac{\cos y - \sin y}{\sin y + \cos y} dy} = e^y \cdot e^{\int \frac{\cos y - \sin y}{\sin y + \cos y} dy} \\ &= e^y (\cos y + \sin y) \end{aligned}$$

Now अब $\frac{dx}{dy} e^y (\cos y + \sin y) + \frac{2x \cos y}{\cos y + \sin y} \cdot e^y (\cos y + \sin y) - e^y (\cos y + \sin y) = 0$

$$\Rightarrow \int d(xe^y (\cos y + \sin y)) - \int e^y (\cos y + \sin y) dy = 0$$

$$\Rightarrow xe^y (\cos y + \sin y) - \left[e^y \sin y - \int e^y \sin y dy + \int e^y \sin y dy \right] = 0$$

$$\Rightarrow xe^y (\cos y + \sin y) = e^y \sin y + c$$

10. If y_1 & y_2 be solutions of the differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, where P & Q are

functions of x alone, and $y_2 = y_1 z$, then prove that $z = 1 + ae^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$, 'a' being an arbitrary constant.

यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, जहाँ P एवं Q केवल x के फलन हैं, के दो हल y_1 एवं y_2 हैं तथा $y_2 = y_1 z$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $z = 1 + ae^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$, जहाँ a स्वेच्छ अचर है।

Sol. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ and $y_2 = y_1 z$ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ और $y_2 = y_1 z$

$$\frac{dy_2}{dx} + Py_2 = Q \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow \frac{d(y_1 z)}{dx} + Py_1 z = Q \quad \Rightarrow z \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{dz}{dx} + Py_1 z = Q$$

$$z \left(\frac{dy_1}{dx} + Py_1 \right) + y_1 \frac{dz}{dx} = Q \quad \Rightarrow y_1(x) \frac{dz}{dx} = Q(1 - z)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Q(1 - z)}{y_1(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 - z} dz = \int \frac{Q(x)}{y_1(x)} dx \quad \Rightarrow \ln(1 - z) = -\int \frac{Q}{y_1} dx + c$$

$$\Rightarrow 1 - z = e^{-\int \frac{Q}{y_1} dx + c} \quad \Rightarrow 1 - z = k e^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$$

$$\Rightarrow z = 1 - k e^{-\int \frac{Q}{y_1} dx} \quad \text{Let } (a = -k) \quad \text{माना } a = -k$$

$$\Rightarrow z = 1 + a e^{-\int \frac{Q}{y_1} dx}$$

11. Let y_1 and y_2 are two different solutions of the equation $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$. Prove that $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ is the general solution of the same equation (C is a constant)

माना y_1 तथा y_2 समीकरण $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ के दो भिन्न-भिन्न हल हैं, तब सिद्ध कीजिए कि $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ दी गई समीकरण का व्यापक हल है। (जहाँ c एक अचर है।)

Sol. $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$
 y_1 & y_2 are two solution of above equation so





$$y_1' + P(x) y_1 = Q(x) \quad \dots(1)$$

$$y_2' + P(x) y_2 = Q(x) \quad \dots(2)$$

Now if $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ is a solution of diff. equation then

$$\frac{d}{dx} (y_1 + c(y_2 - y_1)) + P(x) (y_1 + c(y_2 - y_1)) = Q(x)$$

$$\Rightarrow y_1' + c(y_2' - y_1') + P(x) (y_1 + c(y_2 - y_1)) = Q(x) \quad \dots(3)$$

from equation (1) & (2)

$$(y_2' - y_1') = P(x) (y_1 - y_2)$$

Now from equation (3)

$$\Rightarrow y_1' + P(x) c(y_1 - y_2) + P(x) y_1 + P(x) C(y_2 - y_1) = Q(x)$$

$$\Rightarrow y_1' + P(x) y_1 = Q(x) \quad \text{which is true by equation (1)}$$

so $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ is a general solution of given diff. equation

Hindi. $y' + P(x).y = Q(x)$

उपरोक्त समीकरण के दो हल y_1 एवं y_2 हैं अतः

$$y_1' + P(x) y_1 = Q(x) \quad \dots(1)$$

$$y_2' + P(x) y_2 = Q(x) \quad \dots(2)$$

अब यदि अवकल समीकरण का हल $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$ हो, तो

$$\frac{d}{dx} (y_1 + c(y_2 - y_1)) + P(x) (y_1 + c(y_2 - y_1)) = Q(x)$$

$$\Rightarrow y_1' + c(y_2' - y_1') + P(x) (y_1 + c(y_2 - y_1)) = Q(x) \quad \dots(3)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$(y_2' - y_1') = P(x) (y_1 - y_2)$$

अब समीकरण (3) से

$$\Rightarrow y_1' + P(x) c(y_1 - y_2) + P(x) y_1 + P(x) C(y_2 - y_1) = Q(x)$$

$$\Rightarrow y_1' + P(x) y_1 = Q(x) \quad \text{जो कि समीकरण (1) से सत्य है।}$$

अतः दी गई अवकल समीकरण का व्यापक हल $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$ है।

12. Find the equation of the curve which passes through the origin and the tangent to which at every point (x, y) has slope equal to $\frac{x^4 + 2xy - 1}{1 + x^2}$.

वक्र जो मूल बिन्दु से गुजरता है एवं जिसके प्रत्येक बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{x^4 + 2xy - 1}{1 + x^2}$ हो, का

समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $y = (x - 2\tan^{-1} x) (1 + x^2)$

Sol. $\frac{dy}{dx} - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) y = x^2 - 1$

$$R = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{y}{1+x^2} = \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$$

$$\frac{y}{1+x^2} = \int \left(1 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$$

$$\frac{y}{1+x^2} = x - 2 \tan^{-1} x + c$$

passes through (मूलबिन्दु से जाता है) $(0, 0)$ $c = 0$

$$y = 1 + x^2 (x - 2 \tan^{-1} x)$$





13. A curve $y = f(x)$ passes through the point $p(1, 1)$. The normal to the curve at P is; $a(y - 1) + (x - 1) = 0$. If the slope of the tangent at any point on the curve is proportional to the ordinate of the point, determine the equation of the curve. Also obtain the area bounded by the y-axis, the curve & the normal to the curve at P.

एक वक्र $y = f(x)$ बिन्दु $p(1, 1)$ से गुजरता है। वक्र के बिन्दु P पर अभिलम्ब $a(y - 1) + (x - 1) = 0$ है। वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिन्दु की कोटि के समानुपाती हो, तो वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए। y-अक्ष, वक्र एवं वक्र के बिन्दु P पर अभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. $e^{a(x-1)}, \frac{1}{a} \left[a - \frac{1}{2} + e^{-a} \right]$ sq. unit वर्ग इकाई

Sol. $\frac{dy}{dx} = Ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = Kdx \Rightarrow \ell ny = Kx + c$

It passes through $(1, 1)$, so $c = -k$

$\ell ny = Kx - K$

$\Rightarrow y = e^{K(x-1)}$

Equation of normal $(y - 1) = -\frac{1}{K}(x - 1)$
 $K(y - 1) + (x - 1) = 0$

So $K = a$

So curve is $y = e^{a(x-1)}$

Hindi. $\frac{dy}{dx} = Ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = Kdx \Rightarrow \ell ny = Kx + c$

यह $(1, 1)$ से गुजरता है अतः $c = -k$

$\ell ny = Kx - K$

$\Rightarrow y = e^{K(x-1)}$

अभिलम्ब का समीकरण $(y - 1) = -\frac{1}{K}(x - 1)$

$K(y - 1) + (x - 1) = 0 \Rightarrow K = a$

अतः वक्र $y = e^{a(x-1)}$

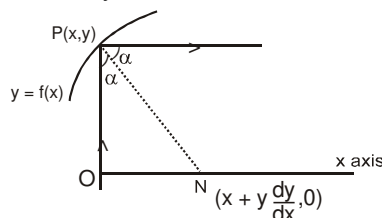
14. Consider a curved mirror $y = f(x)$ passing through $(8, 6)$ having the property that all rays emerging from origin after getting reflected from the mirror becomes parallel to x - axis. Find the equation of curve (s)
 माना कि एक वक्र दर्पण $y = f(x)$ बिन्दु $(8, 6)$ से गुजरता है जिसका गुणधर्म है कि मूल बिन्दु से आपतित सभी किरणें दर्पण से परावर्तन के बाद x - अक्ष के समान्तर हो जाती हैं। वक्र के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. $y^2 = 4(1 + x)$ or (या) $y^2 = 36(9 - x)$

Sol. PN is normal

Reflected ray is parallel to x-axis, therefore $\angle PNO = \alpha$ or $OP = ON$

Equation of normal $\equiv Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$



$x^2 + y^2 = \left(x + y \frac{dy}{dx} \right)^2$

$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$



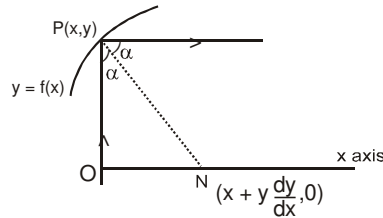
$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} \quad (\text{Homogeneous D.E.})$$

HINDI. PN अभिलम्ब है।

परावर्तित किरण x-अक्ष के समान्तर है। अतः $\angle PNO = \alpha$ या $OP = ON$

$$\text{अभिलम्ब का समीकरण} \equiv Y - y = -\frac{dx}{dy} (X - x)$$



$$x^2 + y^2 = \left(x + y \frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2xy \frac{dy}{dx}$$

$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} \quad \text{समघात अवकल समीकरण}$$

- 15.** Find the curve for which sum of the lengths of the tangent and subtangent at any of its point is proportional to the product of the co-ordinates of the point of tangency, the proportionality factor is equal to k.

वह वक्र ज्ञात कीजिए जिसके लिए वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा एवं अधोः स्पर्श रेखा की लम्बाइयों का योग स्पर्श बिन्दु के निर्देशांकों के गुणनफल के समानुपाती होती है, समानुपाती गुणांक k है।

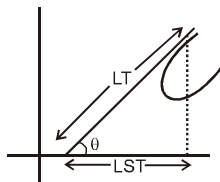
Ans. $y = \pm \frac{1}{k} \ln |c(k^2x^2 - 1)|$

Sol. $LST = \frac{y}{m}$

$$\sin \theta = \frac{y}{LT} \Rightarrow LT = \frac{y\sqrt{1+m^2}}{m}$$

$$LT + LST = kxy$$

$$\left| \left(\frac{y}{m} \right) \sqrt{1+m^2} + \left(\frac{y}{m} \right) \right| = kxy$$



$$\Rightarrow \frac{y}{m} \sqrt{1+m^2} = \pm kxy - \frac{y}{m}$$



$$\Rightarrow y^2 \frac{(1+m^2)}{m^2} = k^2 x^2 y^2 + \frac{y^2}{m^2} \pm 2 \frac{kxy^2}{m}$$

$$\Rightarrow y^2 = k^2 x^2 y^2 \pm 2 \frac{kxy^2}{m} \Rightarrow \pm \frac{2kxy^2}{m} = (k^2 x^2 - 1)y^2 \Rightarrow y = 0 \quad \text{or या } m = \pm \frac{2kx}{k^2 x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \int dy = \pm \int \frac{2kx}{k^2 x^2 - 1} dx \quad \Rightarrow y = \pm \frac{1}{k} \ln(k^2 x^2 - 1) + c$$

$$y = \pm \frac{1}{k} \ln[(k^2 x^2 - 1)] + c$$

16. Find the curve $y = f(x)$ where $f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$, bounding a curvilinear trapezoid with the base $[0, x]$ whose area is proportional to $(n+1)^{\text{th}}$ power of $f(x)$. It is known that $f(1) = 1$

वक्र $y = f(x)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$ और जो $[0, x]$ आधार वाले एक वक्रिय रेखाओं से बने चतुष्फलक जिसका क्षेत्रफल $f(x)$ की $(n+1)$ वीं घात के समानुपाती है, को परिबद्ध करता है। दिया गया है कि $f(1) = 1$.

Ans. $y = x^{1/n}$

Sol. $y = f(x)$ $f(x) \geq 0$ $f(0) = 0$

$$\int_0^x f(x) dx = K f(x)^{n+1}$$

$$f(x) = (n+1) K f(x)^n f'(x)$$

$$y^{1-n} = (n+1) K \frac{dy}{dx}$$

$$\int dx = (n+1) K \int y^{n-1} dy \Rightarrow x + c = (n+1) K \frac{y^n}{n}$$

$$x = 0; y = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow K = \frac{n}{n+1}$$

$$x = y^n \Rightarrow y = (x)^{1/n}$$

17. Find the nature of the curve for which the length of the normal at the point P is equal to the radius vector of the point P.

वक्र की प्रकृति ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु P पर अभिलम्ब की लम्बाई, बिन्दु P पर त्रिज्य सदिश के बराबर है।

Ans. Rectangular hyperbola or circle. आयतीय अतिपरवलय या वृत्त

Sol. $LN = \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}} = y \sqrt{1+m^2}$

$$y \sqrt{1+m^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$m^2 = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow m = \pm \frac{x}{y}$$

$$(+)\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow \text{hyperbola अतिपरवलय}$$

$$(-)\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \rightarrow \text{circle वृत्त}$$

18. A country has a food deficit of 10 %. Its population grows continuously at a rate of 3 % per year. Its annual food production every year is 4 % more than that of the last year. Assuming that the average food requirement per person remains constant, prove that the country will become self-sufficient in food after 'n' years, where 'n' is the smallest integer bigger than or equal to,

$$\frac{\ln 10 - \ln 9}{\ln(1.04) - 0.03}$$



एक देश में खाद्यान्न की 10% कमी है। इसकी जनसंख्या प्रति वर्ष 3% की दर से बढ़ती है। इसका वार्षिक खाद्यान्न उत्पादन विगत वर्ष की तुलना में प्रतिवर्ष 4% ज्यादा होता है। यह मानते हुए कि प्रति व्यक्ति खाद्यान्न की आवश्यकता नियत है, सिद्ध कीजिए कि n वर्षों के बाद देश खाद्यान्न उत्पादन में आत्मनिर्भर हो जायेगा, जहाँ n न्यूनतम पूर्णांक है जो

$$\frac{\ln 10 - \ln 9}{\ln(1.04) - 0.03} \text{ से बड़ा या बराबर है।}$$

Ans. 19

Sol. Food sufficiency is said to be achieved after n years if food available for $(n + 1)^{\text{th}}$ year is equal to food requirement for $(n + 1)^{\text{th}}$ year.

Let f_n is food available for n^{th} year, then $f_{n+1} = f_1 (1.04)^n$

Let P_0 is the initial population.

Let p be the population at any time t , then $\frac{dp}{dt} = 0.03.p$

$$\Rightarrow p = p_0 e^{0.03t}$$

Let r_n be the food requirement for the n^{th} year & k be the food requirement for one person in one year

$$r_{n+1} = \int_n^{n+1} k \cdot p_0 e^{0.03t} dt$$

$$r_{n+1} = kp_0 \frac{e^{0.03(n+1)} - e^{0.03n}}{0.03}$$

$$\Rightarrow r_1 = kp_0 \frac{e^{0.03} - 1}{0.03}$$

$$f_1 = 0.9r_1$$

if food sufficiency is achieved after n years then $f_{n+1} \geq r_{n+1}$

$$f_1 \cdot (1.04)^n \geq \frac{kp_0(e^{0.03(n+1)} - e^{0.03n})}{0.03}$$

$$0.9 \cdot kp_0 \frac{(e^{0.03} - 1)}{0.03} \cdot (1.04)^n \geq \frac{kp_0(e^{0.03(n+1)} - e^{0.03n})}{0.03}$$

$$(0.9)(e^{0.03} - 1)(1.04)^n \geq e^{(0.03n)}(e^{0.03} - 1)$$

$$\ln 0.9 + n \ln(1.04) \geq n(0.03)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 10 - \ln 9}{\ln(1.04) - 0.03}$$

Thus, the least integral values of the year n , when the country becomes self-sufficient, is the smallest integer greater than or equal to $\frac{\ln 10 - \ln 9}{\ln(1.04) - 0.03}$.

Hindi n वर्षों के बाद खाद्य की पर्याप्तता कही जाएगी यदि $(n + 1)$ वें वर्ष के लिए खाद्य सामग्री $(n + 1)$ वें वर्ष की आवश्यकता के बराबर है।

माना n वें वर्ष के लिए f_n खाद्य सामग्री उपलब्ध है तब $f_{n+1} = f_1 (1.04)^n$

माना प्रारम्भिक जनसंख्या P_0 है।

माना किसी समय t पर जनसंख्या P है तब $\frac{dp}{dt} = 0.03.p \Rightarrow p = p_0 e^{0.03t}$

माना n वें वर्ष के लिए खाद्य सामग्री की आवश्यकता r_n है तथा एक वर्ष में एक व्यक्ति के लिए खाद्य सामग्री की मात्रा k है।

$$r_{n+1} = \int_n^{n+1} k \cdot p_0 e^{0.03t} dt$$

$$r_{n+1} = kp_0 \cdot \frac{e^{0.03(n+1)} - e^{0.03n}}{0.03} \Rightarrow r_1 = kp_0 \cdot \frac{e^{0.03} - 1}{0.03}$$



$$f_1 = 0.9r_1$$

यदि n वर्षों के बाद खाद्य पर्याप्तता हो, तो $f_{n+1} \geq r_{n+1}$

$$f_1 \cdot (1.04)^n \geq \frac{kp_0(e^{0.03(n+1)} - e^{0.03n})}{0.03}$$

$$0.9 \cdot kp_0 \cdot \frac{(e^{0.03} - 1)}{0.03} (1.04)^n \geq \frac{kp_0(e^{0.03(n+1)} - e^{0.03n})}{0.03}$$

$$(0.9)(e^{0.03} - 1)(1.04)^n \geq e^{(0.03n)}(e^{0.03} - 1)$$

$$\ln 0.9 + n \ln (1.04) \geq n(0.03)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 10 - \ln 9}{\ln (1.04) - 0.03}$$

19. Solution of Differential equation $\left\{ \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right\} dx + \left\{ \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right\} dy = 0$ is

अवकल समीकरण $\left\{ \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right\} dx + \left\{ \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right\} dy = 0$ का हल है—

Ans. $\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xy}{y-x} = C$

Sol. $\frac{y^2 dx - x^2 dy}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = 0$; $\frac{\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}}{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = 0$

$$\frac{d\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = 0$$
 ; $-\frac{1}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} - \ln x + \ln y = C$

$$\frac{xy}{y-x} + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = C$$

20. Solution of the differential equation $(xdy - ydx)(x+y)^2 = 4xy(x^2+y^2)(xdx - ydy)$ is
अवकल समीकरण $(xdy - ydx)(x+y)^2 = 4xy(x^2+y^2)(xdx - ydy)$ का हल है —

Ans. $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 - y^2 + c$

Sol. $(xdy - ydx) \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2xy(x^2 + y^2)} = 2xdx - 2ydy \Rightarrow \frac{xdy - ydx}{(x^2 + y^2)} = \frac{ydx - xdy}{2xy} + 2xdx - 2ydy$

$$\frac{xdy - ydx}{\left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) + d(x^2 - y^2) \Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)} d\left(\frac{x}{y}\right) + d(x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 - y^2 + c$$



21. Solve . $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 e^{\frac{x(y-x)}{y}} = 2y(x-y)$

$x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 e^{\frac{x(y-x)}{y}} = 2y(x-y)$ का हल है—

Ans. $x(x-y) = y \ln(ce^x - 1)$

Sol. $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 e^{\frac{x(y-x)}{y}} = 2y(x-y) \Rightarrow x^2 e^{\frac{x^2}{y}} dy + y^2 e^x dx = (2yx - 2y^2) e^{\frac{x^2}{y}} dx$

$$\Rightarrow x^2 e^{\frac{x^2}{y}} dy - 2yx \cdot e^{\frac{x^2}{y}} dx + 2y^2 e^{\frac{x^2}{y}} dx + y^2 e^x dx = 0 \Rightarrow \frac{(x^2 dy - y dx^2)}{y^2} + 2 e^{\frac{x^2}{y}} dx + e^x dx = 0$$

$$\Rightarrow -e^{\frac{x^2}{y}} \frac{d\left(\frac{x^2}{y}\right)}{dx} + 2e^{\frac{x^2}{y}} = -e^x \Rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} \frac{d\left(\frac{x^2}{y}\right)}{dx} + (-2) e^{\frac{x^2}{y}} = e^x \quad \left(\text{Put } e^{\frac{x^2}{y}} = t \Rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} \frac{d\left(\frac{x^2}{y}\right)}{dx} = \frac{dt}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} + (-2) \cdot t = e^x \Rightarrow t e^{\int -2 dx} = \int e^x \cdot e^{-2x} dx \Rightarrow t \cdot e^{-2x} = \int e^{-x} dx \Rightarrow e^{\frac{x^2}{y}} \cdot e^{-2x} = -e^{-x} + C$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x^2}{y} - x} = -1 + C \cdot e^x \Rightarrow \frac{x^2}{y} - x = \ln(ce^x - 1) \Rightarrow x(x-y) = y \ln(ce^x - 1)$$

22. Solution of differential equation $xe^{\frac{y}{x}} dy - \left(ye^{\frac{y}{x}} + x^3 \right) dx = 0$ is

अवकल समीकरण $xe^{\frac{y}{x}} dy - \left(ye^{\frac{y}{x}} + x^3 \right) dx = 0$ का हल है—

Ans. $2e^{\frac{y}{x}} + x^2 = C$

Sol. $xe^{\frac{y}{x}} dy - ye^{\frac{y}{x}} dx - x^3 dx = 0$

$$e^{\frac{y}{x}} [x dy - y dx] - x^3 dx = 0$$

$$e^{\frac{y}{x}} d\left(\frac{y}{x}\right) - x dx = 0$$

$$-e^{\frac{y}{x}} - \frac{x^2}{2} + C = 0 \Rightarrow 2e^{\frac{y}{x}} + x^2 = C$$